

Αριθμητικά Συστήματα

1.1 Δυαδικοί Αριθμοί

Από το σχολείο, όλοι μας γνωρίζουμε το δεκαδικό σύστημα. Είναι ένα σύστημα αριθμών που έχει ως βάση το 10. Ο αριθμός δέκα έχει να κάνει με το ότι έχουμε 10 δάκτυλα.

Οι δεκαδικοί αριθμοί δομούνται με βάση 10 ψηφία, τα εξής:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

Αντίστοιχα, υπάρχουν άλλα συστήματα αρίθμησης που δομούνται με βάση άλλον αριθμό ψηφίων. Τέτοια συστήματα μπορεί να είναι π.χ. το δυαδικό, το οχταδικό, το δεκαεξαδικό και γενικά ένα σύστημα αρίθμησης μπορεί να έχει οποιονδήποτε αριθμό ψηφίων για βάση.

Οι δυαδικοί αριθμοί, όπως φανερώνει και το όνομά τους δομούνται με βάση τα εξής δύο ψηφία:

0,1

Παράδειγμα 1

Ένας δυαδικός αριθμός μπορεί π.χ. να είναι το αριθμός 101.

Παράδειγμα 2

Ένας άλλος δυαδικός αριθμός μπορεί π.χ. να είναι ο αριθμός 110110111.

Κάθε δυαδικός αριθμός μπορεί να αντιστοιχηθεί με έναν δυαδικό. Για παράδειγμα το δεκαδικό 0 αντιστοιχίζεται στο δυαδικό 0. Το δεκαδικό 1 αντιστοιχίζεται στο δυαδικό 1. Τώρα,

το δεκαδικό 2 αντιστοιχίζεται στο 10. Το δεκαδικό 3 αντιστοιχίζεται στο δυαδικό 11 κ.τ.λ.

Για να το εξηγήσουμε λίγο αυτό, όπως μετά από το 9 στο δεκαδικό σύστημα πηγαίνουμε στο 10 έτσι και στο δυαδικό, μετά το 1 δεν μπορούμε να πάμε στο 2 γιατί δεν ανήκει στα ψηφία του δυαδικού αριθμού. Με την ίδια λογική δεν μπορούμε να πάμε σε έναν αριθμό με ένα ψηφίο μετά το 9 και πρέπει να πάμε στο 10. Ο δυαδικός αριθμός μετά από το 1 λοιπόν είναι το 10.

Παράδειγμα 3

Ποιος θα μπορούσε να ήταν ο δυαδικός αριθμός 101 στο δεκαδικό; Για να το δούμε αυτό τοποθετούμε τους δυαδικούς αριθμούς στην σειρά:

Δυαδικό	Δεκαδικό
0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5

Επομένως ο αριθμός 101 στο δυαδικό είναι ο 5 στο δεκαδικό.

Αν όμως θέλουμε να μετατρέψουμε έναν μεγαλύτερο αριθμό όπως το 39 ή το 400 π.χ. τότε δεν μπορούμε κάθε φορά να βάζουμε όλους τους αριθμούς στην σειρά. Υπάρχει πιο γρήγορος τρόπος για να μετατρέψουμε κάθε δεκαδικό αριθμό στον αντίστοιχο δυαδικό. Αυτό θα το δούμε σε επόμενο κεφάλαιο.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως μπορούμε να μετατρέψουμε έναν δυαδικό αριθμό σε δεκαδικό. Για να το κάνουμε αυτό πηγαίνουμε σε κάθε ψηφίο του δυαδικού αριθμού από το πρώτο που βρίσκεται πιο δεξιά. Για κάθε αριθμό πολλαπλασιάζουμε το 1 ή το 0 του κάθε ψηφίου του δυαδικού αριθμού ξεκινώντας από το πιο δεξιό ψηφίο έως το πρώτο, επί τον αριθμό 2 στη δύναμη 0,1,2,3,4,5,6,7,8,... ανάλογα την θέση κάθε αριθμού ξεκινώντας από τα δεξιά. Για να το καταλάβουμε αυτό μπορούμε να δούμε το επόμενο παράδειγμα:

Παράδειγμα 4

Ο δυαδικός αριθμός 110101 μπορεί να μετατραπεί σε δεκαδικό ως εξής:

1	1	0	1	0	1
2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

$$\begin{aligned}
 (110101)_2 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 \\
 &= 1 + 0 + 4 + 0 + 16 + 32 = (53)_{10}
 \end{aligned}$$

Άσκηση 1

Να μετατραπεί ο δυαδικός αριθμός 11011011 σε δεκαδικό.

Λύση

$$(11011011)_2 =$$

$$1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 =$$

$$128 + 64 + 16 + 8 + 2 + 1 = 192 + 24 + 3 = (219)_{10}$$

1.2 Μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού με ψηφία μετά την υποδιαστολή σε έναν δεκαδικό αριθμό του συστήματος δεκαδικής αρίθμησης και αντίστροφα

Ένας δυαδικός αριθμός μπορεί να έχει υποδιαστολή και ψηφία μετά από αυτήν. Ένα παράδειγμα τέτοιου αριθμού δίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 1

1101011.1101

Αυτό ο αριθμός έχει ψηφία μετά την τελεία που αποτελεί την υποδιαστολή.

Για να βρούμε ποιος δεκαδικός αριθμός είναι αυτός ο δυαδικός αριθμός, πολλαπλασιάζουμε το ακέραιό του μέρος με τις αντίστοιχες δυνάμεις του 2 όπως κανονικά κάναμε μέχρι τώρα και μετά ασχολούμαστε με τα ψηφία μετά την υποδιαστολή.

Αφού πάρουμε το μέρος των υποδιαϊρέσεων του δυαδικού αριθμού ξεχωριστά, πολλαπλασιάζουμε το πρώτο 1 ή 0 με τον αριθμό 2^{-1} . Μετά παίρνουμε το δεύτερο ψηφίο του μέρους των υποδιαϊρέσεων και το πολλαπλασιάζουμε με τον αριθμό 2^{-2} και μετά συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Παράδειγμα 2

Αν θέλουμε να μετατρέψουμε τον δυαδικό αριθμό $(11.1011)_2$ θα κάνουμε:

$$\begin{aligned}(11.1011)_2 &= \\&= 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} \\&= 2 + 1 + 0.5 + 0 + 0.125 + 0.0625 \\&= 3 + 0.625 + 0.0625 \\&= (3.6875)_{10}\end{aligned}$$

1.3 Μετατροπή Δεκαδικού Αριθμού σε Δυαδικό Αριθμό

Ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να μετατραπεί σε έναν δυαδικό. Η διαδικασία που χρειάζεται να γίνει για αυτό είναι συνεχόμενες ακέραιες διαιρέσεις με το 2 μέχρι να φτάσουμε στον αριθμό 0 για το πηλίκο. Σε κάθε ακέραια διαίρεση που κάνουμε κρατάμε σημειώνουμε το υπόλοιπο, κάτι που είναι πολύ βασικό για την διαδικασία μετατροπής. Αυτό συμβαίνει επειδή μέσα από τα υπόλοιπα όλων των ακέραιων διαιρέσεων θα μας οδηγήσουν, αν τα διαβάσουμε ανάποδα μετά το πέρας των πράξεων, στον αντίστοιχο δυαδικό αριθμό.

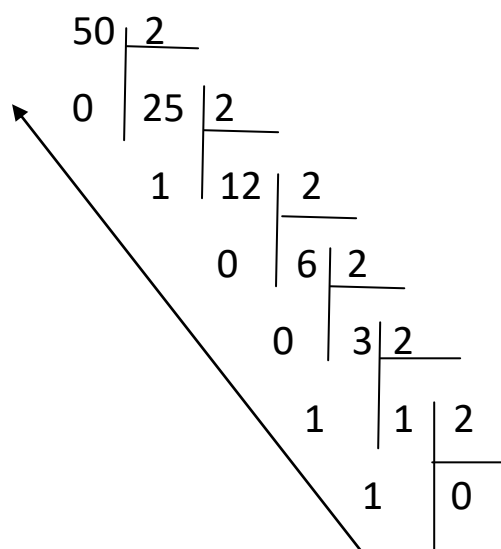
Τα υπόλοιπα των ακέραιων διαιρέσεων, εφόσον η ακέραια διαίρεση γίνεται με τον αριθμό 2, τότε το υπόλοιπο θα είναι είτε 0 είτε 1 και δεν υπάρχει καμία περίπτωση να είναι κάτι άλλο. Αυτό είναι κάτι που συμβαδίζει με το γεγονός ότι

προσπαθούμε να βρούμε ένα δυαδικό αριθμό που αποτελείται μόνο από 0 ή 1.

Στο τέλος όλων των ακέραιων πράξεων, όταν φτάσουμε στο μηδέν πρέπει να σημειώσουμε με την σειρά των διαιρέσεων όλα τα υπόλοιπα. Ξεκινώντας από το τελευταίο υπόλοιπο και πηγαίνοντας προς το πρώτο υπόλοιπο, διαβάζοντας δηλαδή όλα τα υπόλοιπα ανάποδα, σχηματίζουμε τον αντίστοιχο δυαδικό αριθμό. Με ένα παράδειγμα μπορεί να γίνει πιο κατανοητή αυτή η διαδικασία:

Παράδειγμα 1

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε σε ποιον δυαδικό αριθμό αντιστοιχεί ο δεκαδικός αριθμός 50:



Τώρα, αν γράψουμε τα υπόλοιπα που βγάλαμε από αυτές τις ακέραιες διαιρέσεις ανάποδα, τότε θα έχουμε τον αντίστοιχο δυαδικό αριθμό. Αυτός είναι ο 110010

Μπορούμε με μία μετατροπή του δυαδικού αριθμού σε δεκαδικό να επαληθεύσουμε ότι κάναμε σωστά τις πράξεις. Οπότε:

$$(110010)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 = 32 + 16 + 2 = 50$$

Επομένως η διαίρεση έγινε σωστά και πράγματι επαληθεύτηκε ότι ο αριθμός 50 στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης ισούται με τον αριθμός 110010 στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης.

Τώρα, θα πρέπει να υπάρχει και κάποιος τρόπος έτσι ώστε να μπορώ να μετατρέψω τις υποδιαίρέσεις ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης στις υποδιαίρέσεις του δυαδικού συστήματος αρίθμησης. Πράγματι αυτός ο τρόπος υπάρχει και μπορεί να γίνει αν απομονώσουμε το ακέραιο μέρος ενός δεκαδικού αριθμού και το μέρος των υποδιαίρέσεων του δεκαδικού αριθμού. Μετά πολλαπλασιάζουμε τον δεκαδικό αριθμό των υποδιαίρέσεων με το 2 διαδοχικά. Αν βγει αριθμός μικρότερος του ενός κρατάμε το 0 ενώ αν βγει αριθμός μεγαλύτερος από το 1, κρατάμε το 1 και μετά το αφαιρούμε από τον αριθμό και αυτό που μένει το πολλαπλασιάζουμε ξανά με το 2.

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρι να βρούμε αριθμό 0. Όλα αυτά μπορούν να γίνουν πιο κατανοητά από το παρακάτω παράδειγμα:

Παράδειγμα 2

Αν θέλω να μετατρέψω τον δεκαδικό αριθμό 0.125 σε δυαδικό πρέπει να κάνω τα εξής:

$$0.125 \cdot 2 = 0.25 \text{ κρατάω } 0$$

$$0.25 \cdot 2 = 0.5 \text{ κρατάω } 0$$

$$0.5 \cdot 2 = 1 \text{ κρατάω } 1$$

Και μένει 0 οπότε εδώ τελειώνουν οι πράξεις για αυτό το παράδειγμα. Τώρα, δεν διαβάζω αυτά που έχω κρατήσει από τις πράξεις από κάτω προς τα πάνω όπως στην μετατροπή του ακέραιου μέρους αλλά τα διαβάζω με την σειρά που γράφτηκαν, από πάνω προς τα κάτω. Επομένως ο δυαδικός αριθμός είναι ο:

$$0.001$$

Ο αριθμός αυτός είναι όντως το 0.125 στο δεκαδικό καθώς έχει μόνο ένα 1 στην Τρίτη θέση πριν την υποδιαστολή οπότε

$$1 \cdot 2^{-3} = 0.125$$

Μία μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού στο δυαδικό σύστημα αρίθμησης, μπορεί να δημιουργήσει ένα επαναλαμβανόμενο μοτίβο αριθμών που να μην τελειώνουν ποτέ. Αν συμβεί κάτι τέτοιο, και συμβαίνει συχνά, βάζω μία άνω παύλα στα ψηφία που επαναλαμβάνονται στο τέλος του αριθμού και δεν συνεχίζω να βάζω άλλους αριθμούς. Η άνω παύλα δείχνει ότι τα ψηφία από τα οποία βρίσκεται από πάνω, επαναλαμβάνονται επ' άπειρον.

Παράδειγμα 3

Για να μετατρέψω τον δεκαδικό αριθμό 0.35 σε δυαδικό αριθμό κάνω τα εξής:

$$0.35 \cdot 2 = 0.7 \text{ κρατάω } 0$$

$$0.7 \cdot 2 = 1.4 \text{ κρατάω } 1$$

$$1.4 - 1 = 0.4$$

$$0.4 \cdot 2 = 0.8 \text{ κρατάω } 0$$

$$0.8 \cdot 2 = 1.6 \text{ κρατάω } 1$$

$$1.6 - 1 = 0.6$$

$$0.6 \cdot 2 = 1.2 \text{ κρατάω } 1$$

$$1.2 - 1 = 0.2$$

$$0.2 \cdot 2 = 0.4 \text{ κρατάω } 0$$

$$0.4 \cdot 2 = 0.8 \text{ κρατάω } 0$$

$$0.8 \cdot 2 = 1.6 \text{ κρατάω } 1$$

$$1.6 - 1 = 0.6 \text{ κρατάω } 0$$

...

Στη συνέχεια αυτό συνεχίζει επ' άπειρον. Επομένως δεν μπορώ πάντα να βρίσκω έναν αριθμό ο οποίος θα τελειώνει. Για να το δείξουμε αυτό γράφουμε μερικά ψηφία του αριθμού και στα τελευταία ψηφία, αυτά που θα επαναλαμβάνονται βάζουμε μία παύλα. Για παράδειγμα εδώ θα έχω:

$$(0.35)_{10} = (0.01011\overline{0010})_2$$

1.4 Οχταδικό και Δεκαεξαδικό Σύστημα

Όπως είπαμε, το δυαδικό σύστημα αρίθμησης είναι ένα σύστημα που έχει ως βάση το 2. Με την ίδια λογική μπορούν να υπάρξουν κι άλλα συστήματα αρίθμησης τα οποία έχουν ως βάση κάποιον άλλον αριθμό. Παραδείγματα τέτοιων συστημάτων αποτελούν το οχταδικό και το δεκαεξαδικό σύστημα.

Το οχταδικό σύστημα περιλαμβάνει 8 ψηφία. Τα εξής:

0,1,2,3,4,5,6,7

Ενώ το δεκαεξαδικό σύστημα περιλαμβάνει τα εξής ψηφία:

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,A,B,C,D,E,F

Όπου τα γράμματα συμβολίζουν με την σειρά τους αριθμούς 10,11,12,13,14,15 που τώρα πια δεν μπορούμε να τους γράψουμε με αυτή την μορφή, δηλαδή με δύο ψηφία αλλά πρέπει να υιοθετήσουμε ένα μοναδικό ψηφίο για αυτούς κι όχι δύο όπως είναι π.χ. το 10 ή το 12. Έτσι στο δεκαεξαδικό το A είναι το 10, το B το 11, το C είναι το 12, το D είναι το 13, το E είναι το 14 ενώ το F είναι το 15.

Παράδειγμα 1

Ένας οχταδικός αριθμός μπορεί π.χ. να είναι ο 647.

Σημείωση: Εδώ πρέπει να αναφέρω πως ο αριθμός 647 του οχταδικού συστήματος δεν έχει σχέση με τον αριθμό 647 του δεκαδικού συστήματος.

Παράδειγμα 2

Ένας δεκαεξαδικός αριθμός μπορεί π.χ. να είναι ο A3B5F

Σημείωση: Προσοχή, ο αριθμός 647 δεν είναι στο δεκαδικό σύστημα επομένως δεν είναι ο αριθμός που φαίνεται όπως θα ήταν στο δεκαδικό σύστημα. Στην πραγματικότητα, στο δεκαδικό σύστημα, ο αριθμός αυτός είναι ο 423. Παρακάτω θα

δούμε πως μπορούμε να μετατρέψουμε έναν οχταδικό αριθμό σε δεκαδικό.

Άσκηση

Να μετατρέψεις τον δεκαδικό αριθμό 304.45 σε δυαδικό αριθμό.

Λύση

Σε περιπτώσεις που θα χρειαστεί να βρούμε έναν δυαδικό αριθμό που έχει ψηφία και μετά αλλά και πριν την υποδιαστολή τότε πρέπει να χωρίσουμε το ακέραιο μέρος του δεκαδικού από τις υποδιαίρέσεις και να δουλέψουμε με αυτά χωριστά. Σε κάθε τέτοια περίπτωση πρέπει να δρούμε με αυτόν τον τρόπο:

$$\frac{304}{2} = 152 \text{ και υπολοιπο } 0$$

$$\frac{152}{2} = 76 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$\frac{76}{2} = 38 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$\frac{38}{2} = 19 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$\frac{19}{2} = 9 \text{ και υπόλοιπο } 1$$

$$\frac{9}{2} = 4 \text{ και υπόλοιπο } 1$$

$$\frac{4}{2} = 2 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$\frac{2}{2} = 1 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$\frac{1}{2} = 0 \text{ και υπόλοιπο } 1$$

Τώρα αν βάλουμε τα υπόλοιπα ανάποδα έχουμε τον δυαδικό αριθμό 100110000

Θα δουλέψουμε και με τις υποδιαιρέσεις του αριθμού. Θα πολλαπλασιάσουμε διαδοχικά με 2:

$$0.45 \cdot 2 = 0.9 \text{ κρατάμε } 0$$

$$0.9 \cdot 2 = 1.8 \text{ κρατάμε } 1$$

$$0.8 \cdot 2 = 1.6 \text{ κρατάμε } 1$$

$$0.6 \cdot 2 = 1.2 \text{ κρατάμε } 1$$

$$0.2 \cdot 2 = 0.4 \text{ κρατάμε } 0$$

$$0.4 \cdot 2 = 0.8 \text{ κρατάμε } 0$$

$$0.8 \cdot 2 = 1.6 \text{ κρατάμε } 1$$

Εδώ φαίνεται ότι οι αριθμοί θα αρχίσουμε να επαναλαμβάνονται. Άρα το μέρος με τις υποδιαιρέσεις του αριθμού 0.45 είναι:

$$0.011100\overline{1100}$$

Συνδυάζοντας τώρα τα δύο μέρη του αρχικού αριθμού θα έχω την πλήρη μετατροπή του στο δυαδικό:

$$100110000.011100\overline{1100}$$

1.4 Μετατροπή ενός οχταδικού ή ενός δεκαεξαδικού αριθμού σε Δεκαδικό

Η μετατροπή μονάδων τώρα θα γίνει με βάση το 8 αν θέλουμε να μετατρέψουμε ένα οχταδικό αριθμό στο δεκαδικό σύστημα ή με βάση το 16 αν θέλουμε να μετατρέψουμε ένα δεκαεξαδικό αριθμό σε δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Η διαδικασία είναι παρόμοια με αυτή που εφαρμόσαμε για την μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού σε δεκαδικού. Αυτή την φορά όμως θα έχουμε πιο δύσκολους πολλαπλασιασμούς.

Για να μετατρέψουμε έναν αριθμό από οχταδικό σε δεκαδικό σύστημα θα χρησιμοποιήσουμε δυνάμεις της βάσης του συστήματος. Άρα θα χρησιμοποιήσουμε δυνάμεις του 8. Η μετατροπή έχει πολλές ομοιότητες με την μετατροπή του δυαδικού σε δεκαδικό. Με ένα παράδειγμα μπορεί να γίνει κατανοητό:

Παράδειγμα 3

Έστω ότι θέλω να μετατρέψω τον αριθμό 72 σε δεκαδικό. Το 2 βρίσκεται στην πρώτη θέση άρα αντιστοιχεί σε δύναμη 0 ενώ το 7 βρίσκεται στην δεύτερη θέση άρα αντιστοιχεί σε δύναμη 1. Επομένως έχω :

$$(72)_8 = 7 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 = 56 + 2 = (58)_{10}$$

Παράδειγμα 4

Έστω ότι θέλω να μετατρέψω τον παρακάτω αριθμό στο δεκαδικό. Τότε κάνω τις εξής πράξεις:

$$\begin{aligned}(4374)_8 &= 4 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0 \\ &= 4 \cdot 512 + 3 \cdot 64 + 7 \cdot 8 + 4 \cdot 1 = \\ &2048 + 192 + 56 + 4 = (2300)_{10}\end{aligned}$$

Άσκηση 2

Να μετατραπεί ο παρακάτω οχταδικός αριθμός στο δεκαδικό σύστημα μονάδων:

$$(1435)_8$$

Λύση

$$\begin{aligned}(1435)_8 &= 1 \cdot 8^3 + 4 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8^1 + 5 \cdot 8^0 \\ &= 512 + 4 \cdot 64 + 3 \cdot 8 + 5 = 512 + 256 + 24 + 5 \\ &= 768 + 29 = (797)_{10}\end{aligned}$$

Άσκηση 3

Μετατρέψτε τον παρακάτω αριθμό που βρίσκεται στο δεκαεξαδικό σύστημα σε αριθμό του δεκαδικού συστήματος αρίθμησης:

$$(5BF4)_{16}$$

Λύση

Η βάση του συστήματος είναι ο αριθμός 16. Επομένως θα αναλύσουμε τον δεκαεξαδικό αριθμό τους κάναμε πριν αλλά τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το 16 αντί για το 8. Οι αριθμοί που είναι από 10 και πάνω και συμβολίζονται με γράμματα θα τους γράψουμε με την δεκαδική τους μορφή, δηλαδή με δύο ψηφία, για να μπορέσουμε να κάνουμε πράξεις. Έχουμε:

$$\begin{aligned}(5BF4)_{16} &= 5 \cdot 16^3 + 11 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^1 + 4 \cdot 16^0 \\&= 5 \cdot 4096 + 11 \cdot 256 + 15 \cdot 16 + 4 \cdot 1 \\&= 20480 + 2816 + 240 + 4 \\&= 23296 + 244 = (23540)_{10}\end{aligned}$$

Μετατροπή ενός αριθμούς από το n -αδικό σύστημα αρίθμησης στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης.

Τα αριθμητικά συστήματα μπορεί να είναι οποιουδήποτε συστήματος αριθμών. Π.χ. μπορούμε να μιλήσουμε για τριαδικό σύστημα , για πενταδικό σύστημα, για εξαδικό σύστημα, για εντεκαδικό σύστημα. Δεν έχουμε κανέναν περιορισμό σε ποιο σύστημα θα πάμε όπως δεν έχουμε κανέναν περιορισμό σε ποιον αριθμό θα πάμε.

Υπάρχει τρόπος έτσι ώστε οποιοσδήποτε αριθμός σε οποιοδήποτε σύστημα να μετατραπεί στο δεκαδικό σύστημα. Πάντα χρησιμοποιούμε την βάση του αριθμητικού συστήματος , για το n -αδικό σύστημα η βάση είναι το n , π.χ. για εφταδικό σύστημα η βάση είναι το 7.

Ο τρόπος που μετατρέπουμε σε δεκαδικό είναι παρόμοιος με τα άλλα συστήματα που έχουμε δει μέχρι στιγμής. Ξεκινώντας από το ψηφίο του n -αδικού αριθμού που είναι δεξιότερα και πολλαπλασιάζουμε την τιμή του επί n εις την μηδενική. Μετά προσθέτουμε τον πολλαπλασιασμό του δεύτερου ψηφίου επί την βάση n εις την πρώτη. Στην συνέχεια πολλαπλασιάζουμε το τρίτο ψηφίο επί την βάση n και υψώνουμε στο τετράγωνο κ.τ.λ.

Παράδειγμα

Ας μετατρέψουμε τον πενταδικό αριθμό 432 στο δεκαδικό σύστημα. Άρα έχουμε

$$(432)_2 = 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 4 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \\ = 75 + 15 + 2 = (82)_{10}$$

Εδώ να παρατηρήσουμε ότι ο πενταδικός αριθμός δεν μπορεί να έχει ψηφίο που να είναι 5 ή μεγαλύτερο. Κάθε σύστημα αν έχει το n για βάση τότε κάθε ψηφίο του μπορεί να είναι από 0 έως $n-1$.

Αυτό συμβαίνει επειδή τα ψηφία ξεκινούν από τον αριθμό 0 οπότε όταν φτάσουν στον $n-1$ αριθμό, στο σύνολό του θα είναι n ψηφία.

Παράδειγμα

Αν έχω ένα επταδικό σύστημα αρίθμησης πρέπει συνολικά να έχω 7 αριθμούς ξεκινώντας από το 0. Οπότε αρχίζω και μετράω:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

Το πλήθος όλων αυτών των αριθμών είναι 7. Είναι 6 από το 1 έως το 6 και το μηδέν άρα βγαίνει 7 σε πλήθος. Αν έχω 7 αριθμούς σε πλήθος, ο μεγαλύτερος για 1 ψηφίο είναι ο 6. Επομένως στο επταδικό σύστημα έχω αριθμούς από το 0 έως το 6.

Άσκηση

Να μετατραπεί ο αριθμός 4867 του ενιαδικού συστήματος σε δεκαδικό αριθμό.

Λύση

Το ενιαδικό σύστημα έχει βάση το 9. Οπότε σε κάθε πολλαπλασιασμό πολλαπλασιάζω με την αντίστοιχη δύναμη:

$$\begin{aligned}(4867)_9 &= 4 \cdot 9^3 + 8 \cdot 9^2 + 6 \cdot 9^1 + 7 \cdot 9^0 = \\ &= 4 \cdot 729 + 8 \cdot 81 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 1 = \\ &= 2916 + 648 + 54 + 7 = \\ &= (3625)_{10}\end{aligned}$$

Άσκηση

Μετατρέψτε τον αριθμό του 13αδικού συστήματος 49AB στο 10δικό σύστημα αρίθμησης.

Λύση

Το 13αδικό σύστημα έχει ως βάση τον αριθμό 13. Επομένως περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς από το 0 έως το 9 αλλά προσοχή, μετά δεν πάμε στο 10 αλλά στο A γιατί θέλουμε να έχουμε ένα ψηφίο για κάθε βασικό αριθμό του

αριθμητικού συστήματος. Η λογική είναι ίδια με το δεκαεξαδικό αριθμητικό σύστημα. Το 10 είναι το A , το 11 το B και το 12 το C.

Όμως όταν γράφω τον αριθμό σε φθίνουσες δυνάμεις του 13 τότε βάζω τον αντίστοιχο δεκαδικό αριθμό για κάθε ψηφίο. Π.χ. το B θα το βάλω 11. Οπότε έχουμε:

$$(49AB)_{13} = 4 \cdot 13^3 + 9 \cdot 13^2 + 10 \cdot 13^1 + 11 \cdot 13^0 =$$

$$= 4 \cdot 2197 + 9 \cdot 169 + 10 \cdot 13 + 10 \cdot 13^0 =$$

$$= 8788 + 1521 + 130 + 10 =$$

$$= (10449)_{10}$$

Μετατροπή ενός αριθμού του δεκαδικού συστήματος σε αριθμό του οχταδικού ή δεκαεξαδικού συστήματος

Κάθε δεκαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί αντίστοιχα στο οχταδικό ή στο δεκαεξαδικό σύστημα.

Ας θυμηθούμε πως μετατρέπαμε έναν δεκαδικό αριθμό σε δυαδικό. Αυτό που κάναμε ήταν να κάνουμε διαδοχικές διαιρέσεις βρίσκοντας τα υπόλοιπα του και συνεχίζοντας να διαιρούμε το πηλίκο μέχρι να φτάσουμε στην τιμή 0.

Κάτι αντίστοιχο συμβαίνει στο οχταδικό σύστημα. Διαιρούμε με ακέραια διαίρεση τον αριθμό του δεκαδικού συστήματος διαδοχικά με το 8. Όσο αφορά την μετατροπή σε δεκαεξαδικό σύστημα σε αριθμό δεκαδικού συστήματος διαιρούμε ακέραια με 16 διαδοχικά και κρατάμε κάθε φορά το υπόλοιπο.

Γενικεύοντας, για να μετατρέψω έναν δεκαδικό αριθμό σε αριθμό του n -ικού συστήματος διαιρώ διαδοχικά με n , κρατάω το κάθε υπόλοιπο, και συνεχίζω να διαιρώ με το n κάνοντας ακέραια διαίρεση μέχρι να φτάσω στο 0.

Παράδειγμα 1

Ας προσπαθήσω να γράψω τον αριθμό 124 σε οχταδικό σύστημα.

$124/8 = 15$ και υπόλοιπο 4

$15/8 = 1$ και υπόλοιπο 7

$1/8 = 0$ και υπόλοιπο 1

Τώρα γράφουμε τον οχταδικό αριθμό σε ανάποδη σειρά από αυτόν που τον βρήκαμε. Άρα $(124)_{10} = (174)_8$

Παράδειγμα 2

Ας προσπαθήσω τώρα να γράψω τον αριθμό 124 σε δεκαεξαδικό σύστημα. Θα εφαρμόσω διαδοχικές διαιρέσεις με τον αριθμό 16.

$124/16 = 7$ και υπόλοιπο 12 άρα ο αριθμός C

$7/16 = 0$ και υπόλοιπο 7

Άρα:

$$(124)_{10} = (7C)_{16}$$

Άσκηση 4

Να μετατραπεί ο αριθμός του δεκαδικού συστήματος 10435 σε:

α) Οχταδικό Σύστημα

β) Να γίνει επαλήθευση για το α ερώτημα

γ) Σε Δεκαεξαδικό Σύστημα

δ) Να γίνει επαλήθευση για το γ ερώτημα

Λύση

α) Εφαρμόζω διαδοχικές διαιρέσεις με το 8

$$10435/8 = 1304 \text{ και υπόλοιπο } 3$$

$$1304/8 = 163 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$163/8 = 20 \text{ και υπόλοιπο } 3$$

$$20/8 = 2 \text{ και υπόλοιπο } 4$$

$$2/8 = 0 \text{ και υπόλοιπο } 2$$

$$(10435)_{10} = (24303)_8$$

β) Για να κάνω επαλήθευση προσπαθώντας να εντοπίσω λάθη που μπορεί να έχουν γίνει στις διαιρέσεις μετατρέπω τον αριθμό που έβγαλα στο δεκαδικό:

$$\begin{aligned}(24303)_8 &= 2 \cdot 8^4 + 4 \cdot 8^3 + 3 \cdot 8^2 + 0 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0 = \\ &8192 + 2048 + 192 + 3 = (10435)_{10}\end{aligned}$$

Επομένως γυρίσαμε στον αριθμό του α ερωτήματος. Άρα η μετατροπή είναι σωστή.

γ) Για να μετατρέψω τον δεκαδικό αριθμό στον αντίστοιχο αριθμό στο δεκαεξαδικό σύστημα αρίθμησης διαιρώ διαδοχικά με 16:

$$10435/16 = 652 \text{ και υπόλοιπο } 3$$

$652/16 = 40$ και υπόλοιπο 12 δηλαδή C

$40/16 = 2$ και υπόλοιπο 8

$2/16 = 0$ και υπόλοιπο 2

Οπότε ο αντίστοιχος αριθμός στο δεκαεξαδικό σύστημα είναι ο :

$$(10435)_{10} = (28C3)_{16}$$

δ) Για να το επαληθεύσουμε μετατρέπουμε τον δεκαεξαδικό αριθμό πίσω στο δεκαδικό:

$$\begin{aligned}(28C3)_{16} &= 2 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 3 \cdot 16^0 = \\ &= 8192 + 2048 + 192 + 3 = (10435)_{10}\end{aligned}$$

Επομένως ο δεκαεξαδικό αριθμό γυρίζει στον ίδιο δεκαδικό. Οπότε η μετατροπή είναι σωστή.

**Μετατροπή ενός δεκαδικού αριθμού σε n-αδικό σύστημα
αρίθμησης**

Ένας αριθμός του δεκαδικού συστήματος μπορεί να μετατραπεί σε ένα n -αδικό σύστημα διαιρώντας διαδοχικά με n όλα τα πηλικά μέχρι το 0 και κρατώντας το υπόλοιπο όπως είχα αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Το n μπορεί να συμβολίζει οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης, η διαδικασία είναι ίδια για οποιοδήποτε αριθμό.

Παράδειγμα 1

Για παράδειγμα αν έχω τον αριθμό $(514)_{10}$ για να το μετατρέψω π.χ. στο πενταδικό διαιρώ διαδοχικά με 5 και κρατάω το υπόλοιπο. Δηλαδή:

$$514/5 = 102 \text{ και υπόλοιπο } 2$$

$$102/5 = 20 \text{ και υπόλοιπο } 2$$

$$20/5 = 4 \text{ και υπόλοιπο } 0$$

$$4/5 = 0 \text{ και υπόλοιπο } 4$$

Διαβάζουμε τον πενταδικό αριθμό από κάτω προς τα πάνω.

$$\text{Οπότε } (514)_{10} = (4022)_5$$

Παράδειγμα 2

Ας πούμε ότι θέλω να μετατρέψω τον 514 του παραπάνω παραδείγματος του δεκαδικού συστήματος, να το μετατρέψω στο επταδικό. Εφαρμόζω την ίδια στρατηγική, διαιρώ διαδοχικά και κρατάω το υπόλοιπο. Οπότε

$$514/7 = 73 \text{ και υπόλοιπο } 3$$

$$73/7 = 10 \text{ και υπόλοιπο } 3$$

$$10/7 = 1 \text{ και υπόλοιπο } 3$$

$$1/7 = 0 \text{ και υπόλοιπο } 1$$

Οπότε:

$$(514)_{10} = (1333)_7$$

3. Προσημασμένοι Αριθμοί

3.1 Συμπλήρωμα ως προς ένα

Το συμπλήρωμα του ενός είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών στη δυαδική μορφή. Σε αυτή τη μέθοδο, για να πάρουμε το συμπλήρωμα ενός ενός δυαδικού αριθμού, απλά αντιστρέφουμε όλα τα bits του αριθμού, δηλαδή τα 0 γίνονται 1 και τα 1 γίνονται 0.

Παράδειγμα 1

Για παράδειγμα, αν έχουμε τον δυαδικό αριθμό 1010 (το οποίο είναι το 10 στο δεκαδικό σύστημα), το συμπλήρωμα του ενός θα είναι 0101 (το οποίο είναι το -10 στο δεκαδικό

σύστημα, όταν χρησιμοποιούμε το συμπλήρωμα του ενός για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών). Αυτό ισχύει καθώς ο αριθμός 1010 στο δεκαδικό είναι $8 + 2 = 10$, άρα ο αριθμός 10 στο δεκαδικό. Επομένως το συμπλήρωμά του ως προς 1 θα είναι ο αριθμός -10 και θα αντιστοιχεί στον αριθμό 0101.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τον δυαδικό αριθμό 01101001 (το οποίο είναι το 6 στο δεκαδικό σύστημα). Για να βρούμε το συμπλήρωμα του ενός, αντιστρέφουμε κάθε bit. Έτσι, το συμπλήρωμα του ενός του 01101001 είναι 10010110. Αυτό αντιπροσωπεύει τον αριθμό -105 όταν χρησιμοποιούμε το συμπλήρωμα του ενός για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών. Αυτό συμβαίνει επειδή ο αριθμός 01101001 είναι ο αριθμός 105 στο δεκαδικό αν κάνουμε την μετατροπή. Επομένως, το συμπλήρωμα που θα προκύψει θα είναι ο αντίθετος αριθμός από το 105, δηλαδή το -105.

Παράδειγμα 3

Έστω ότι έχουμε τον δυαδικό αριθμό 010111 (το οποίο είναι το 9 στο δεκαδικό σύστημα). Αντιστρέφουμε κάθε bit για να πάρουμε το συμπλήρωμα του ενός, οπότε το συμπλήρωμα του ενός του 010111 είναι 101000. Αυτό αντιπροσωπεύει τον αριθμό -23 όταν χρησιμοποιούμε το συμπλήρωμα του ενός για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών. Αυτό συμβαίνει επειδή ο αριθμός στο δυαδικό 010111 είναι το 23 στο δεκαδικό, το συμπλήρωμα του ως προς 1 θα είναι ο -23.

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι, ενώ το συμπλήρωμα του ενός είναι μια απλή και άμεση μέθοδος για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών, δεν είναι η πιο συνηθισμένη μέθοδος που χρησιμοποιείται στους υπολογιστές. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι προκαλεί ορισμένα προβλήματα, όπως την ύπαρξη δύο αναπαραστάσεων για το μηδέν (0000 και 1111). Για αυτόν τον λόγο, η πιο συνηθισμένη μέθοδος για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών στους υπολογιστές είναι το συμπλήρωμα του δύο.

3.2 Συμπλήρωμα ως προς δύο

Το συμπλήρωμα ως προς δύο είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών στη δυαδική μορφή. Σε αυτή τη μέθοδο, για να πάρουμε το συμπλήρωμα ως προς δύο ενός δυαδικού αριθμού, αντιστρέφουμε κάθε bit (όπως στο συμπλήρωμα ως προς ένα) και στη συνέχεια προσθέτουμε 1 στο αποτέλεσμα.

Το συμπλήρωμα ως προς δύο είναι μια πολύ σημαντική έννοια στην πληροφορική και την αρχιτεκτονική υπολογιστών. Χρησιμοποιείται ευρέως για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών σε δυαδική μορφή, καθώς και για την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων, όπως η αφαίρεση και η πρόσθεση.

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα του συμπληρώματος ως προς δύο είναι ότι επιτρέπει την εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με θετικούς και αρνητικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας τους ίδιους αλγόριθμους. Για παράδειγμα, για να αφαιρέσουμε έναν αριθμό από έναν άλλο, μπορούμε απλά να προσθέσουμε το συμπλήρωμα ως προς δύο του αριθμού που θέλουμε να αφαιρέσουμε.

Επιπλέον, το συμπλήρωμα ως προς δύο διευκολύνει την αναπαράσταση και την επεξεργασία αριθμών σε υπολογιστικά συστήματα, καθώς επιτρέπει την αναπαράσταση τόσο των θετικών όσο και των αρνητικών αριθμών με τη χρήση ενός μόνο bit για το πρόσημο. Αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο σε περιβάλλοντα όπου οι πόροι είναι περιορισμένοι, όπως στην ενσωματωμένη συστήματα και την ψηφιακή σχεδίαση κυκλωμάτων

Παράδειγμα 1

Έστω ότι έχουμε τον δυαδικό αριθμό 0110 (το οποίο είναι το 6 στο δεκαδικό σύστημα). Παίρνουμε πρώτα το συμπλήρωμα ως προς ένα που είναι 1001 και προσθέτουμε 1. Αν προσθέσουμε 1 θα κάνει 10 στο δυαδικό σύστημα άρα το συμπλήρωμα ως προς δύο είναι 1010. Αυτό αντιπροσωπεύει τον αριθμό -6 όταν χρησιμοποιούμε το συμπλήρωμα ως προς δύο για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών.

Παράδειγμα 2

Έστω ότι έχουμε τον δυαδικό αριθμό 1001 (το οποίο είναι το 9 στο δεκαδικό σύστημα). Αντιστρέφουμε όλα τα ψηφία κι έχουμε 0110, προσθέτουμε και το 1 στο τέλος κι έχουμε 0111 που είναι το συμπλήρωμα ως προς 2 του αριθμού 1001. Αυτό αντιπροσωπεύει τον αριθμό -9 όταν χρησιμοποιούμε το συμπλήρωμα ως προς δύο για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών.

Παράδειγμα 3

Έστω ότι έχουμε τον δυαδικό αριθμό 0011 (το οποίο είναι το 3 στο δεκαδικό σύστημα). Πρώτα αντιστρέφουμε τον αριθμό. Η αντιστροφή δίνει 1100 και μετά προσθέτω το δυαδικό 1 άρα το συμπλήρωμα ως προς δύο είναι 1101. Αυτό αντιπροσωπεύει τον αριθμό -3 όταν χρησιμοποιούμε το

συμπλήρωμα ως προς δύο για την αναπαράσταση αρνητικών αριθμών.

Οι σύγχρονοι υπολογιστές χρησιμοποιούν κυρίως το συμπλήρωμα ως προς 2 για να αναπαραστήσουν αρνητικούς αριθμούς. Δεν είναι όμως ο μοναδικός τρόπος. Θα αναφερθούμε σε αυτό σε επόμενο κεφάλαιο.

Ένα πολύ βασικό πλεονέκτημα του συμπληρώματος ως προς 2 είναι ότι το μηδέν μπορεί να αναπαρασταθεί με μοναδικό τρόπο μέσω αυτού του συμπληρώματος. Συγκεκριμένα αν έχω το 0000 που αντιστοιχεί στον αριθμό 0 στο δεκαδικό, για να το μετατρέψω σε συμπλήρωμα ως προς δύο, αντιστρέφω όλα τα ψηφία του. Άρα έχω 1111. Μετά προσθέτω το 1 οπότε γίνεται 10000. Το τελευταίο ψηφίο όμως το πετάω γιατί έχω θεωρήσει ότι ο αριθμός αποτελείται από 4 bit και δεν μπορεί να έχει 5^ο αριθμό. Οπότε το 1 το βγάζω και έχω το 0000 που είναι το 0. Επομένως το 0000 χωρίς συμπλήρωμα είναι ουσιαστικά ο αριθμός 0 ενώ σε συμπλήρωμα ως προς δύο βγαίνει πάλι 0000. Επομένως το 0 στο δυαδικό ισοδυναμεί με το -0 και αυτοί οι δύο αριθμοί, εφόσον ξέρουμε ότι $0=-0$, στο δυαδικό, είτε με συμπλήρωμα ως προς 2 είτε χωρίς αποτελούν έναν αριθμό το 0.

Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει με το συμπλήρωμα ως προς 1. Αυτό συμβαίνει γιατί ο αριθμός 0000 του δυαδικού στο δεκαδικό είναι το 0. Το -0 προκύπτει αν αντιστρέψω όλα τα ψηφία, άρα θα έχω 1111. Εδώ δεν θα προσθέσω 1 γιατί στο συμπλήρωμα ως προς 1 δεν κάνω αυτή την πράξη. Επομένως το 0 είναι το 0000 και το -0 είναι το 1111. Αυτό δεν στέκει λογικά γιατί δεν μπορεί να υπάρχουν δύο αριθμοί στο δυαδικό που να αναπαριστούν την ίδια αξία στο δεκαδικό και μεταξύ τους να είναι διαφορετικοί.

