Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Μαθηματικά Ι

Προτεινόμενες Λύσεις Παλιών Θεμάτων

Ημερομηνία : 20 Απριλίου 2026

Επιμέλεια: Σερετίδης Αναστάσιος

Όνομα Φοιτητή/τριας: ....

1. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024-2025

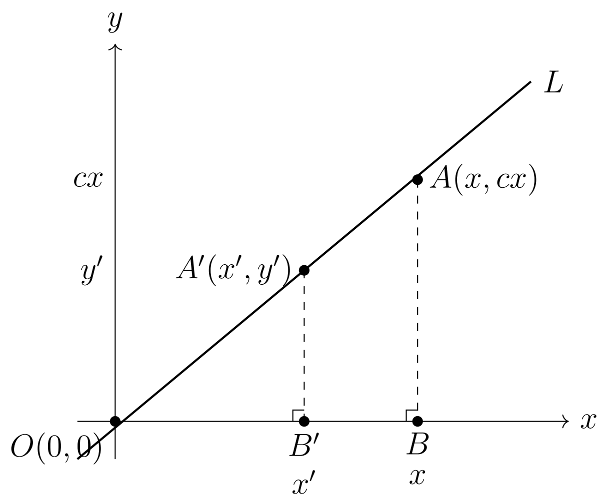
Θέμα 1.

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = cx, \qquad c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά},$$

είναι μία ευθεία που περνάει από το $(0,0)$.

Λύση



Σχόλιο. *Ο σταθερός λόγος*

$$c = \frac{y}{x}$$

ονομάζεται κλίση της ευθείας L.

Έστω $c > 0$. Θεωρούμε την ευθεία L που περνάει από τα σημεία

$$O = (0,0) \quad \text{και} \quad A = (x, cx), \text{ με } x > 0.$$

Θεωρούμε οποιοδήποτε άλλο σημείο $A' = (x', y')$ της ευθείας L, με $x' > 0$. Έστω $B = (x, 0)$ και $B' = (x', 0)$ οι προβολές των A, A' αντίστοιχα στον άξονα $x'x$.

Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ABO και $A'B'O$ είναι όμοια (Θεώρημα Θαλή). Άρα:

$$\frac{A'B'}{OB'} = \frac{AB}{OB} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{x'} = \frac{cx}{x} = c \quad \Longleftrightarrow \quad y' = cx' = f(x').$$

Επομένως το σημείο A' ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Από την αυθαιρεσία του A', προκύπτει ότι η γραφική παράσταση της f ταυτίζεται με την ευθεία L. Επίσης,

$$f(0) = 0,$$

οπότε η γραφική παράσταση διέρχεται από το $(0,0)$.

$$\boxed{\text{Η γραφική παράσταση της } f(x) = cx \text{ είναι ευθεία που περνάει από το } (0,0).}$$

2. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2024-2025

Θέμα 1.

Εκφώνηση. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to -\infty} x\big(\sqrt{x^2-4}+x\big).$$

Λύση.

Για $x \to -\infty$ ισχύει $x < 0$, άρα $|x| = -x$. Γράφουμε:

$$\sqrt{x^2-4} = |x|\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = (-x)\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}.$$

Τότε:

$$\sqrt{x^2-4}+x = (-x)\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+x = x\Big(1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\Big).$$

Άρα:

$$x(\sqrt{x^2-4}+x) = x^2\Big(1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\Big).$$

Η παραπάνω παράσταση είναι απροσδιόριστη μορφή $0 \cdot \infty$, οπότε χρησιμοποιούμε τη συζυγή παράσταση:

$$1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1-\big(1-\frac{4}{x^2}\big)}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{\frac{4}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}.$$

Άρα:

$$x^2\Big(1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\Big) = x^2 \cdot \frac{\frac{4}{x^2}}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}} = \frac{4}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}.$$

Καθώς $x \to -\infty$, ισχύει
$$\frac{4}{x^2} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} \to 1.$$
Επομένως:
$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2-4}+x) = \frac{4}{1+1} = 2.$$
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2-4}+x) = 2}$$

3. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2021-2022 και Σεπ 2022–2023

Θέμα 4

Εκφώνηση. Δείξτε ότι
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \text{για κάθε } a \in \mathbb{R}.$$

Λύση Θέτουμε
$$y(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x,$$
για x αρκετά μεγάλο ώστε $1+\frac{a}{x} > 0$. Τότε
$$\log y(x) = x \log\left(1+\frac{a}{x}\right).$$
Με αντικατάσταση $t = \frac{a}{x}$ (οπότε $t \to 0$ όταν $x \to +\infty$) έχουμε:
$$\log y(x) = a \cdot \frac{\log(1+t)}{t}.$$

Χρησιμοποιώντας το βασικό όριο

$$\lim_{t \to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1,$$

προκύπτει

$$\lim_{x \to +\infty} \log y(x) = a.$$

Άρα, επειδή exp συνεχής,

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \exp\left(\lim_{x \to +\infty} \log y(x) \right) = \exp(a) = e^a.$$

Συνεπώς

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a, \ \forall a \in \mathbb{R}.}$$

4. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2021–2022

Θέμα 1.

Εκφώνηση. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}, \qquad x \neq 1.$$

Λύση. Το πεδίο ορισμού είναι

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{(x^2)'(x-1) - x^2(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Κρίσιμα σημεία (στο D_f) είναι οι λύσεις της $f'(x) = 0$:

$$x(x-2) = 0 \implies x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Για τον χαρακτηρισμό τους χρησιμοποιούμε τη συνθήκη 2ης τάξης. Παραγωγίζουμε:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \implies f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Ελέγχουμε στα κρίσιμα σημεία:

$$f''(0) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \implies x = 0 \text{ είναι σημείο τοπικού μεγίστου,}$$

$$f''(2) = \frac{2}{(1)^3} = 2 > 0 \implies x = 2 \text{ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.}$$

Υπολογίζουμε τις αντίστοιχες τιμές:

$$f(0) = \frac{0}{-1} = 0, \qquad f(2) = \frac{4}{1} = 4.$$

Άρα:

$$\boxed{\text{Τοπικό μέγιστο στο } x = 0 \text{ με τιμή } f(0) = 0,}$$

$$\boxed{\text{Τοπικό ελάχιστο στο } x = 2 \text{ με τιμή } f(2) = 4.}$$

5. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2021-2022

Θέμα 1.

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η συνάρτηση

$$f : \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{2x-3}{3x+2},$$

είναι 1–1 και να υπολογίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Λύση.

Πεδίο ορισμού. Η συνάρτηση δεν ορίζεται όταν $3x + 2 = 0$, δηλαδή για

$$x = -\frac{2}{3}.$$

Άρα

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}.$$

Μονοτονία – 1–1. Η f είναι ρητή συνάρτηση, άρα παραγωγίσιμη στο D_f. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = \left(\frac{2x-3}{3x+2}\right)' = \frac{(2x-3)'(3x+2) - (2x-3)(3x+2)'}{(3x+2)^2} = \frac{2(3x+2) - (2x-3)\cdot 3}{(3x+2)^2}.$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{6x+4-6x+9}{(3x+2)^2} = \frac{13}{(3x+2)^2}.$$

Επειδή

$$(3x+2)^2 > 0 \quad \forall x \in D_f,$$

προκύπτει

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in D_f.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_f και συνεπώς είναι **1–1**.

Υπολογισμός της αντίστροφης συνάρτησης. Θέτουμε

$$y = f(x) = \frac{2x-3}{3x+2}.$$

Λύνουμε ως προς x:

$$y(3x+2) = 2x-3$$

$$3xy + 2y = 2x - 3$$

$$3xy - 2x = -3 - 2y$$

$$x(3y-2) = -(3+2y).$$

Εφόσον $3y - 2 \neq 0$, έχουμε

$$x = \frac{-3-2y}{3y-2}.$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση είναι

$$f^{-1}(y) = \frac{-3-2y}{3y-2}.$$

Αντικαθιστώντας το y με x, γράφουμε τελικά:

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{-3-2x}{3x-2}}.$$

Συμπέρασμα. Η συνάρτηση f είναι 1-1 στο $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}\right\}$ και η αντίστροφή της δίνεται από

$$f^{-1}(x) = \frac{-3-2x}{3x-2}.$$

6. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2021–2022

Θέμα 2.

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^2 = 2 - 2\log x$$

έχει το πολύ μία ρίζα.

Λύση

Παρατηρούμε ότι πρέπει $x > 0$ (ώστε να ορίζεται το $\log x$). Μεταφέρουμε όλα τα μέλη στο ίδιο μέλος και ορίζουμε:

$$h(x) = x^2 + 2\log x - 2, \qquad x > 0.$$

Τότε η εξίσωση $x^2 = 2 - 2\log x$ είναι ισοδύναμη με

$$h(x) = 0.$$

Η h είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$. Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$h'(x) = (x^2)' + 2(\log x)' - 0 = 2x + \frac{2}{x} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Για κάθε $x > 0$ έχουμε $x > 0$ και $\frac{1}{x} > 0$, άρα

$$h'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0, \qquad \forall x > 0.$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ μπορεί να έχει το πολύ μία λύση, διότι αν υπήρχαν $x_1 < x_2$ με $h(x_1) = h(x_2) = 0$, αυτό θα αντέβαινε στη γνησίως αύξουσα μονοτονία της h.

$$\boxed{\text{Η εξίσωση } x^2 = 2 - 2\log x \text{ έχει το πολύ μία ρίζα.}}$$

7. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2024-2025

Θέμα 2.

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 3x + 7$$

δεν έχει ποτέ δύο ρίζες στο $[0, 1]$.

Λύση

Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με άτοπο, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Rolle.

Υπόθεση προς άτοπο: Έστω ότι η f έχει δύο (διαφορετικές) ρίζες στο $[0, 1]$, δηλαδή υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in [0, 1]$ με $\rho_1 < \rho_2$ τέτοιες ώστε

$$f(\rho_1) = 0 \quad \text{και} \quad f(\rho_2) = 0.$$

Η f είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2). Επομένως, από το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει

$\xi \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = 0.$$

Υπολογίζουμε την παράγωγο:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1).$$

Άρα

$$f'(\xi) = 0 \iff 3(\xi^2 - 1) = 0 \iff \xi^2 = 1 \iff \xi = \pm 1.$$

Όμως $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 1)$, άρα ξ δεν μπορεί να είναι ούτε 1 ούτε -1. Αυτό είναι **άτοπο**.

Συνεπώς η αρχική υπόθεση ήταν λανθασμένη και η f **δεν μπορεί να έχει δύο ρίζες** στο $[0, 1]$.

$$\boxed{\text{Η } f(x) = x^3 - 3x + 7 \text{ δεν έχει ποτέ δύο ρίζες στο } [0,1].}$$

8. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2021-2022

Θέμα 2.(i)

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^2 = 2 - 2\ln x$$

έχει μία ρίζα στο $(1, 2)$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι πρέπει $x > 0$ (ώστε να ορίζεται το $\ln x$). Θέτουμε

$$h(x) = x^2 + 2\ln x - 2, \qquad x > 0.$$

Τότε η εξίσωση $x^2 = 2 - 2\ln x$ είναι ισοδύναμη με

$$h(x) = 0.$$

Η h είναι συνεχής στο $[1,2]$, διότι είναι άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (x^2, $\ln x$) στο $(0,+\infty)$. Υπολογίζουμε τις τιμές στα άκρα:

$$h(1) = 1^2 + 2\ln 1 - 2 = 1 + 0 - 2 = -1 < 0,$$

$$h(2) = 2^2 + 2\ln 2 - 2 = 4 + 2\ln 2 - 2 = 2 + 2\ln 2 > 0 \quad (\text{αφού } \ln 2 > 0).$$

Άρα

$$h(1) < 0 < h(2).$$

Επομένως, από το **Θεώρημα Bolzano** (ενδιάμεσων τιμών), υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0.$$

Δηλαδή υπάρχει $x_0 \in (1,2)$ με

$$x_0^2 = 2 - 2\ln x_0.$$

$$\boxed{\text{Η εξίσωση } x^2 = 2 - 2\ln x \text{ έχει μία ρίζα στο } (1,2).}$$

Θέμα 2.(ii)

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η ρίζα της εξίσωσης

$$x^2 = 2 - 2\ln x$$

στο $(1,2)$ είναι **μοναδική**.

Λύση (με τη μεθοδολογία των σημειώσεων – μονοτονία).

Όπως και πριν, θέτουμε

$$h(x) = x^2 + 2\ln x - 2, \qquad x > 0,$$

ώστε η εξίσωση να είναι ισοδύναμη με $h(x) = 0$.

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και

$$h'(x) = (x^2)' + 2(\ln x)' = 2x + \frac{2}{x} = 2\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Για κάθε $x > 0$ ισχύει $x > 0$ και $\frac{1}{x} > 0$, άρα

$$h'(x) = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) > 0, \qquad \forall x > 0.$$

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και ειδικότερα στο $(1, 2)$.

Άρα η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές λύσεις στο $(1, 2)$: αν υπήρχαν $x_1 < x_2$ με $h(x_1) = h(x_2) = 0$, τότε λόγω γνησίως αύξουσας h θα έπρεπε να ισχύει $h(x_1) < h(x_2)$, άτοπο.

Συνεπώς η ρίζα στο $(1, 2)$ είναι μοναδική.

$$\boxed{\text{Η εξίσωση } x^2 = 2 - 2\ln x \text{ έχει μοναδική ρίζα στο } (1, 2).}$$

9. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2022-2023

Θέμα 2.(i)

Εκφώνηση. Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$x^3 = a.$$

Λύση

Θέτουμε

$$g(x) = x^3 - a, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Η g είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Επιλέγουμε έναν αριθμό $M > 0$ με $M > |a|$ (π.χ. $M = |a| + 1$). Τότε:

$$g(M) = M^3 - a \geq M^3 - |a| > 0,$$

ενώ

$$g(-M) = (-M)^3 - a = -M^3 - a \leq -M^3 + |a| < 0.$$

Άρα

$$g(-M) < 0 < g(M).$$

Επομένως, από το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_0 \in (-M, M)$ τέτοιο ώστε

$$g(x_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0^3 - a = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_0^3 = a.$$

Άρα υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x^3 = a$.

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}:\ x^3 = a.}$$

Θέμα 2.(ii)

Εκφώνηση. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και έχει τρεις διαφορετικές ρίζες. Δείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f''(x_0) = 0.$$

Λύση

Αφού η f έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, υπάρχουν $r_1 < r_2 < r_3$ τέτοια ώστε

$$f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[r_1, r_2]$ και παραγωγίσιμη στο (r_1, r_2), οπότε από το **Θεώρημα Rolle** υπάρχει $\xi_1 \in (r_1, r_2)$ με

$$f'(\xi_1) = 0.$$

Ομοίως, επειδή $f(r_2) = f(r_3)$, η f είναι συνεχής στο $[r_2, r_3]$ και παραγωγίσιμη στο (r_2, r_3), άρα υπάρχει $\xi_2 \in (r_2, r_3)$ με

$$f'(\xi_2) = 0.$$

Έχουμε λοιπόν

$$r_1 < \xi_1 < r_2 < \xi_2 < r_3,$$

άρα $\xi_1 < \xi_2$.

Επειδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, η f' είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2). Επιπλέον,

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0.$$

Επομένως, εφαρμόζοντας ξανά το **Θεώρημα Rolle** στη f' στο διάστημα $[\xi_1, \xi_2]$, υπάρχει $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο ώστε

$$(f')'(x_0) = 0 \quad \iff \quad f''(x_0) = 0.$$

$$\boxed{\exists x_0 \in \mathbb{R} \ \text{ τέτοιο ώστε } \ f''(x_0) = 0.}$$

10. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024-2025

Θέμα 2.(i)

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η εξίσωση

$$x^3 = 6x^2 - 6$$

έχει μία ρίζα στο $(1, 4)$.

Λύση

Θέτουμε

$$h(x) = x^3 - 6x^2 + 6, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Η h είναι πολυωνυμική, άρα συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ειδικότερα στο $[1, 4]$.

Υπολογίζουμε:

$$h(1) = 1 - 6 + 6 = 1 > 0, \qquad h(4) = 64 - 96 + 6 = -26 < 0.$$

Άρα

$$h(1) > 0 > h(4).$$

Επομένως, από το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_0 \in (1,4)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \iff x_0^3 - 6x_0^2 + 6 = 0 \iff x_0^3 = 6x_0^2 - 6.$$

Άρα η εξίσωση έχει **μία (τουλάχιστον) ρίζα** στο $(1,4)$.

$$\boxed{\exists x_0 \in (1,4):\ x_0^3 = 6x_0^2 - 6.}$$

Θέμα 2.(ii)

Εκφώνηση. Δείξτε ότι η ρίζα αυτή είναι **μοναδική**.

Λύση

Θεωρούμε την ίδια συνάρτηση

$$h(x) = x^3 - 6x^2 + 6.$$

Παραγωγίζουμε:

$$h'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4).$$

Για κάθε $x \in (1,4)$ ισχύει $x > 0$ και $x - 4 < 0$, άρα

$$h'(x) = 3x(x-4) < 0, \qquad \forall x \in (1,4).$$

Επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1,4)$. Άρα η εξίσωση $h(x)=0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $(1,4)$ (διότι μια γνησίως φθίνουσα συνάρτηση τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ μία φορά).

Σε συνδυασμό με το (i), συμπεραίνουμε ότι η ρίζα στο $(1,4)$ είναι **μοναδική**.

$$\boxed{\text{Η εξίσωση } x^3=6x^2-6 \text{ έχει μοναδική ρίζα στο } (1,4).}$$

11. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2021-2022

Θέμα 3.

Εκφώνηση. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}.$$

Λύση

Θέτουμε

$$u=e^x \quad \Longrightarrow \quad du=e^x dx=u\,dx \quad \Longrightarrow \quad dx=\frac{du}{u}.$$

Τότε

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\int \frac{1}{\sqrt{1+u}}\cdot\frac{du}{u}=\int \frac{du}{u\sqrt{1+u}}.$$

Κάνουμε δεύτερη αντικατάσταση:

$$t=\sqrt{1+u} \quad \Longrightarrow \quad u=t^2-1, \quad du=2t\,dt.$$

Άρα

$$\int \frac{du}{u\sqrt{1+u}}=\int \frac{2t\,dt}{(t^2-1)\,t}=\int \frac{2\,dt}{t^2-1}.$$

Διασπάμε σε απλά κλάσματα:

$$\frac{2}{t^2-1} = \frac{2}{(t-1)(t+1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}.$$

Επομένως,

$$\int \frac{2\,dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

Επιστρέφουμε στις αρχικές μεταβλητές:

$$t = \sqrt{1+u} = \sqrt{1+e^x}.$$

Άρα

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C.}$$

12. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2022-2023

Θέμα 3.

Εκφώνηση. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}.$$

Λύση

Θέτουμε

$$u = \sqrt[4]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad x = u^4 \quad \Longrightarrow \quad dx = 4u^3\,du.$$

Τότε

$$\sqrt{x} = \sqrt{u^4} = u^2, \qquad \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{u^4} = u,$$

και άρα

$$I = \int \frac{4u^3\,du}{u^2+u} = \int \frac{4u^3}{u(u+1)}\,du = \int \frac{4u^2}{u+1}\,du.$$

Γράφουμε

$$\frac{u^2}{u+1} = u - 1 + \frac{1}{u+1}, \quad \textbf{διότι} \quad u^2 = (u+1)(u-1)+1.$$

Άρα

$$I = 4\int \left(u - 1 + \frac{1}{u+1}\right)\,du = 4\left(\frac{u^2}{2} - u + \ln|u+1|\right) + C.$$

Επομένως

$$I = 2u^2 - 4u + 4\ln|u+1| + C.$$

Επιστρέφουμε στη μεταβλητή x, αφού $u = \sqrt[4]{x}$ και $u^2 = \sqrt{x}$:

$$\boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln\left|1+\sqrt[4]{x}\right| + C.}$$

13. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024-2025

Θέμα 3.

Εκφώνηση. Υπολογίστε το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{1+e^x}.$$

Λύση

Θέτουμε

$$u = e^x \quad \Longrightarrow \quad du = e^x dx = u\,dx \quad \Longrightarrow \quad dx = \frac{du}{u}.$$

Τότε

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{1}{1+u} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{du}{u(1+u)}.$$

Κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{u(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{1+u}.$$

Άρα

$$1 = A(1+u) + Bu = A + (A+B)u \Longrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ A + B = 0 \end{cases} \Longrightarrow B = -1.$$

Επομένως

$$\int \frac{du}{u(1+u)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u} \right) du = \ln|u| - \ln|1+u| + C = \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C.$$

Επιστρέφουμε στη μεταβλητή x με $u = e^x > 0$:

$$\boxed{\int \frac{dx}{1+e^x} = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C = x - \ln(1+e^x) + C.}$$

14. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2021-2022

Θέμα 5.(i)

Να δειχθεί με τον ορισμό ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

συγκλίνει στο μηδέν.

Λύση

Γενικά για τη σύγκλιση ακολουθίας

Μία ακολουθία (a_n) λέγεται ότι συγκλίνει στο πραγματικό αριθμό $L \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \forall n \geq N :\ |a_n - L| < \varepsilon.$$

Στην περίπτωση αυτή γράφουμε:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος πραγματικός αριθμός L, τότε η ακολουθία λέγεται αποκλίνουσα.

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε φυσικό αριθμό N τέτοιο ώστε

$$N > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Τότε, για κάθε $n \geq N$ ισχύει:

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Άρα, σύμφωνα με τον ορισμό του ορίου ακολουθίας,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

□

Θέμα 5.(ii)

Να δειχθεί ότι, αν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, τότε:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

Λύση

Θέτουμε την αλλαγή μεταβλητής

$$t = a + b - x.$$

Τότε:

$$dt = -dx.$$

Όταν $x = a$, τότε $t = b$, και όταν $x = b$, τότε $t = a$.
Άρα:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,dx = \int_b^a f(t)(-dt) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Επομένως:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx.$$

□

15. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024–2025

Θέμα 3.(i)

Εκφώνηση. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και F η συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Δείξτε ότι, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 \in (a,b)$, τότε η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Λύση
Θα υπολογίσουμε την παράγωγο της F στο x_0 από τον ορισμό.
Έχουμε:

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}.$$

Από τον ορισμό της F:

$$F(x_0+h)-F(x_0)=\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Άρα

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt.$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0, από το θεώρημα μέσης τιμής για ολοκληρώματα, για κάθε $h\neq 0$ υπάρχει ξ_h μεταξύ x_0 και x_0+h τέτοιο ώστε

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt=f(\xi_h)\,h.$$

Άρα

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt=f(\xi_h).$$

Όταν $h\to 0$, τότε $\xi_h\to x_0$ και, λόγω της συνέχειας της f στο x_0, παίρνουμε:

$$\lim_{h\to 0} f(\xi_h)=f(x_0).$$

Επομένως

$$\boxed{F'(x_0)=f(x_0)}.$$

Άρα η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η παράγωγός της ισούται με την τιμή της f στο x_0. $\square$

16. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024–2025

Θέμα 1.(i)

Εκφώνηση. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q}, \\ x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι το όριο

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

δεν υπάρχει.

Λύση (κριτήριο με ακολουθίες).

Κριτήριο Ακολουθιών για το όριο συνάρτησης

Η συνάρτηση f έχει όριο L στο σημείο x_0, δηλαδή

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) με

$$x_n \to x_0 \quad \text{και} \quad x_n \neq x_0,$$

ισχύει

$$f(x_n) \to L.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο ακολουθιών: αν υπήρχε το όριο $\lim_{x \to 1} f(x) = L$, τότε για κάθε ακολουθία (a_n) με $a_n \to 1$ και $a_n \neq 1$ θα έπρεπε να ισχύει $f(a_n) \to L$.

Θεωρούμε δύο ακολουθίες που τείνουν στο 1:

1η ακολουθία (ρητοί). Θέτουμε

$$a_n = 1 + \frac{1}{n} \in \mathbb{Q}.$$

Τότε $a_n \to 1$ και επειδή $a_n \in \mathbb{Q}$ έχουμε

$$f(a_n) = 0, \quad \forall n \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0.$$

2η ακολουθία (άρρητοι). Θέτουμε

$$b_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Τότε $b_n \to 1$ και επειδή $b_n \notin \mathbb{Q}$ έχουμε

$$f(b_n) = b_n = 1 + \frac{\sqrt{2}}{n} \quad \implies \quad \lim_{n\to\infty} f(b_n) = 1.$$

Άρα υπάρχουν δύο ακολουθίες που τείνουν στο 1 αλλά οι αντίστοιχες τιμές της f τείνουν σε διαφορετικά όρια:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = 0 \neq 1 = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Επομένως το $\lim_{x\to 1} f(x)$ **δεν μπορεί να υπάρχει**.

$$\boxed{\lim_{x\to 1} f(x) \text{ δεν υπάρχει.}}$$

$\square$

17. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024–2025

Θέμα 2.(i)

Εκφώνηση. Έστω ότι οι f και g είναι συνεχείς στο $[a,b]$ και ότι

$$f(x) \le 0 \le g(x),\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{αλλά και} \quad f(a) = g(a),\ f(b) = g(b).$$

Δείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) + g(x_0) = x_0.$$

Λύση

Από $f(x) \le 0 \le g(x)$ για κάθε x και από $f(a) = g(a)$, προκύπτει αναγκαστικά

$$f(a) = g(a) = 0$$

(διότι ο μόνος αριθμός που είναι ταυτόχρονα ≤ 0 και ≥ 0 είναι το 0). Ομοίως,

$$f(b) = g(b) = 0.$$

Θέτουμε τη συνάρτηση

$$h(x) = f(x) + g(x) - x, \qquad x \in [a,b].$$

Η h είναι συνεχής στο $[a,b]$ ως άθροισμα/διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Επιπλέον,

$$h(a) = f(a) + g(a) - a = 0 + 0 - a = -a, \qquad h(b) = f(b) + g(b) - b = 0 + 0 - b = -b.$$

Στις εξετάσεις το διάστημα $[a, b]$ είναι τέτοιο ώστε $0 \in [a, b]$ (δηλαδή $a \leq 0 \leq b$), οπότε

$$h(a) = -a \geq 0 \quad \textbf{και} \quad h(b) = -b \leq 0.$$

Άρα

$$h(a) \cdot h(b) \leq 0.$$

Επομένως, από το **Θεώρημα Bolzano** υπάρχει $x_0 \in [a, b]$ **τέτοιο ώστε**

$$h(x_0) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0) + g(x_0) - x_0 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0) + g(x_0) = x_0.$$

$$\boxed{\exists\, x_0 \in [a, b] \text{ με } f(x_0) + g(x_0) = x_0.}$$

$\square$

18. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024–2025

Θέμα 4.(i)

Εκφώνηση. Να διερευνηθεί η σύγκλιση της ακολουθίας

$$a_n = a^n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

Λύση (κατά περίπτωση).

- **$|a| < 1$**: Τότε $a^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$.
- **$a = 1$**: $a_n = 1^n = 1$ για όλα τα n, άρα $\lim a_n = 1$.
- **$a = 0$**: $a_n = 0^n = 0$ για όλα τα $n \geq 1$, άρα $\lim a_n = 0$.
- **$a = -1$**: $a_n = (-1)^n$ ταλαντώνεται μεταξύ -1 και 1, άρα δεν συγκλίνει.
- **$a > 1$**: Τότε $a^n \to +\infty$ (η ακολουθία είναι αύξουσα και απεριόριστη).
- **$a < -1$**: Τότε $|a| > 1$ και $|a|^n \to +\infty$, ενώ τα πρόσημα εναλλάσσονται, άρα η a^n δεν έχει όριο (είναι απεριόριστη και ταλαντώνεται).

Συνοπτικά:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, & |a| < 1, \\ 1, & a = 1, \\ 0, & a = 0, \end{cases} \qquad \text{ενώ για } a \leq -1 \text{ ή } a > 1 \text{ η ακολουθία δεν συγκλίνει (για } a > 1 \text{ αποκλίνει στο } +\infty).}$$

Θέμα 4.(ii)

Εκφώνηση. Να υπολογιστεί το όριο

$$\lim_{x\to 1} \frac{\displaystyle\int_0^{\log x} f(t)\,dt}{(x-1)^2},$$

όπου $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$, με την f παραγωγίσιμη και την f' συνεχή στο 0.

Λύση (κλασικός τρόπος: αλλαγή μεταβλητής + κανόνας de l'Hospital).

Θέτουμε

$$u = \log x \quad \Longleftrightarrow \quad x = e^u.$$

Όταν $x \to 1$, τότε $u = \log x \to 0$. Το όριο γίνεται

$$\lim_{u\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^u f(t)\,dt}{(e^u - 1)^2}.$$

Έχουμε $\int_0^u f(t)\,dt \to 0$ και $(e^u-1)^2 \to 0$, άρα μορφή $\frac{0}{0}$. Εφαρμόζουμε de l'Hospital.

1η εφαρμογή: Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, άρα συνεχής κοντά στο 0, από το Θ.Θ.Α.Λ.:

$$\frac{d}{du}\left(\int_0^u f(t)\,dt\right) = f(u).$$

Επίσης,

$$\frac{d}{du}\big((e^u-1)^2\big) = 2(e^u-1)e^u.$$

Άρα

$$\lim_{u\to 0} \frac{\int_0^u f(t)\,dt}{(e^u-1)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{2(e^u-1)e^u}.$$

Και πάλι έχουμε $\frac{0}{0}$, διότι $f(0) = 0$ και $e^u - 1 \to 0$.

2η εφαρμογή: Παραγωγίζουμε ξανά:

$$\frac{d}{du} f(u) = f'(u),$$

και

$$\frac{d}{du}\big(2(e^u-1)e^u\big) = 2\Big((e^u)e^u + (e^u-1)e^u\Big) = 2\big(2e^{2u} - e^u\big).$$

Άρα
$$\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{2(e^u-1)e^u}=\lim_{u\to 0}\frac{f'(u)}{2(2e^{2u}-e^u)}.$$
Επειδή f' είναι συνεχής στο 0, παίρνουμε $f'(u)\to f'(0)=2$. Επίσης $2(2e^{2u}-e^u)\to 2(2\cdot 1-1)=2$. Άρα
$$\lim_{u\to 0}\frac{f'(u)}{2(2e^{2u}-e^u)}=\frac{2}{2}=1.$$
$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\int_0^{\log x} f(t)\,dt}{(x-1)^2}=1.}$$

19. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Ιαν 2024–2025

Θέμα 5.(i)

Εκφώνηση. Να υπολογιστεί η άπειρη σειρά
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\,2^n}{n!}.$$

Λύση (κλασικός τρόπος με γνωστές σειρές του e^x).
Γνωρίζουμε ότι
$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$
Θέτοντας $x=2$, παίρνουμε
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}=e^2.$$

Παραγωγίζουμε ως προς x:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x:

$$xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!}.$$

Άρα για $x = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,2^n}{n!} = 2e^2.$$

Ξαναπαραγωγίζουμε την ταυτότητα xe^x:

$$(xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Από την άλλη,

$$(xe^x)' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{n!}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^{n-1}}{n!}.$$

Πολλαπλασιάζοντας με x:

$$x(x+1)e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}.$$

Θέτοντας $x = 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\,2^n}{n!} = 2(2+1)e^2 = 6e^2.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2\,2^n}{n!} = 6e^2.}$$

Θέμα 5.(ii)

Εκφώνηση. Να βρεθούν αν υπάρχουν τα $\sup, \inf, \max, \min$ του συνόλου

$$A = \left\{ \frac{1}{n+2} : n = 1, 2, 3, \ldots \right\}.$$

Απλοί ορισμοί: $\sup, \inf, \max, \min$

Έστω $A \subset \mathbb{R}$ μη κενό σύνολο.

- Το μέγιστο του A, αν υπάρχει, είναι το μεγαλύτερο στοιχείο του και συμβολίζεται με $\max A$.
- Το ελάχιστο του A, αν υπάρχει, είναι το μικρότερο στοιχείο του και συμβολίζεται με $\min A$.
- Το άνω ελάχιστο (supremum) του A, και γράφουμε $\sup A$, είναι το μικρότερο από όλα τα άνω φράγματα του A.
- Το κάτω ελάχιστο (infimum) του A, και γράφουμε $\inf A$, είναι το μεγαλύτερο από όλα τα κάτω φράγματα του A.

Λύση.
Το σύνολο είναι

$$A = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}.$$

Η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n+2}$ είναι γνησίως φθίνουσα και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0.$$

Άρα το 0 είναι κάτω φράγμα του A και μάλιστα είναι το μέγιστο κάτω φράγμα:

$$\inf A = 0.$$

Όμως $0 \notin A$ (διότι $\frac{1}{n+2} > 0$ για κάθε n), άρα min A **δεν υπάρχει**.

Επίσης, το μεγαλύτερο στοιχείο του A είναι το πρώτο:

$$\frac{1}{3} \in A, \quad \text{και} \quad \frac{1}{n+2} \leq \frac{1}{3} \ \ \forall n \geq 1.$$

Άρα

$$\sup A = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad \max A = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{\sup A = \max A = \frac{1}{3}, \qquad \inf A = 0, \qquad \min A \text{ δεν υπάρχει.}}$$

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2024-2025

Θέμα 1.(ii)

Εκφώνηση. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο α και $f(\alpha) < 0$. Δείξτε ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$f(x) < 0 \quad \text{για κάθε } x \text{ που ικανοποιεί } |x - \alpha| < \delta.$$

Λύση (με τον ορισμό της συνέχειας).

Από τη συνέχεια της f στο α ισχύει:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \ |x - \alpha| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \varepsilon.$$

Επειδή $f(\alpha) < 0$, ο αριθμός $-f(\alpha)$ είναι θετικός. Θέτουμε

$$\varepsilon = \frac{-f(\alpha)}{2} > 0.$$

Τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, αν $|x - \alpha| < \delta$, να ισχύει

$$|f(x) - f(\alpha)| < \frac{-f(\alpha)}{2}.$$

Από την ιδιότητα της απόλυτης τιμής παίρνουμε:

$$-\frac{-f(\alpha)}{2} < f(x) - f(\alpha) < \frac{-f(\alpha)}{2}.$$

Δηλαδή

$$\frac{f(\alpha)}{2} < f(x) < \frac{3f(\alpha)}{2}.$$

Ειδικά από το αριστερό άκρο:

$$f(x) < f(\alpha) + \frac{-f(\alpha)}{2} = \frac{f(\alpha)}{2}.$$

Επειδή $f(\alpha) < 0$, έχουμε $\frac{f(\alpha)}{2} < 0$, άρα

$$f(x) < 0.$$

Συνεπώς, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε x με $|x - \alpha| < \delta$ να ισχύει $f(x) < 0$.

$$\boxed{\exists \delta > 0 : \ |x - \alpha| < \delta \Longrightarrow f(x) < 0.}$$

$\square$

20. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2024-2025

Θέμα 2.(i)

Εκφώνηση. Έστω f ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$. Δείξτε ότι υπάρχει αριθμός $x \in [a,b]$ τέτοιος ώστε

$$\int_a^x f(t)\,dt = \int_x^b f(t)\,dt.$$

Λύση (με συνέχεια + Bolzano).
Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_x^b f(t)\,dt, \qquad x \in [a,b].$$

Επειδή η f είναι ολοκληρώσιμη, η συνάρτηση

$$x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$, και επίσης η

$$x \mapsto \int_x^b f(t)\,dt$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$. Άρα και η F είναι συνεχής στο $[a,b]$.
Υπολογίζουμε τις τιμές της στα άκρα:

$$F(a) = \int_a^a f(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt = 0 - \int_a^b f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt,$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_b^b f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt - 0 = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Άρα

$$F(a) = -I, \qquad F(b) = I, \quad \textbf{όπου } I = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Επομένως

$$F(a)\cdot F(b) = (-I)\cdot I = -I^2 \le 0.$$

Άρα, από το **Θεώρημα Bolzano**, υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ τέτοιο ώστε

$$F(x_0) = 0.$$

Δηλαδή

$$\int_a^{x_0} f(t)\,dt - \int_{x_0}^b f(t)\,dt = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^b f(t)\,dt.$$

$$\boxed{\exists\, x_0 \in [a,b] : \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^b f(t)\,dt.}$$

□

21. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2024-2025

Θέμα 4.(i)

Εκφώνηση. Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}.$$

Λύση.

Διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με 2^n:

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1 + \dfrac{(-1)^n}{2^n}}{2 + \dfrac{(-1)^{n+1}}{2^n}}.$$

Επειδή

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{και} \quad \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

παίρνουμε

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}} = \frac{1}{2}.}$$

Κριτήριο σύγκλισης (μέσω απόλυτης τιμής)

Αν μια ακολουθία (x_n) ικανοποιεί

$$|x_n| \le y_n \quad \text{για όλα τα } n$$

και

$$\lim_{n\to\infty} y_n = 0,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Εφαρμογή

Θέτουμε

$$x_n = \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Τότε

$$|x_n| = \left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Επειδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0,$$

από το παραπάνω κριτήριο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{(-1)^n}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ομοίως, για

$$z_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$$

έχουμε

$$|z_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

άρα (με το ίδιο κριτήριο)

$$\frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Θέμα 4.(ii)

Εκφώνηση. Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα $\sup, \inf, \max, \min$ του συνόλου

$$A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 \le x \le e\}.$$

Λύση.
Το A αποτελείται από όλους τους ρητούς αριθμούς του διαστήματος $[1, e]$.

- **Κάτω φράγμα:** Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \ge 1$, άρα το 1 είναι κάτω φράγμα. Επιπλέον $1 \in \mathbb{Q}$ και $1 \le 1 \le e$, άρα $1 \in A$. Συνεπώς

$$\inf A = 1 \quad \text{και} \quad \min A = 1.$$

- **Άνω φράγμα:** Για κάθε $x \in A$ ισχύει $x \le e$, άρα το e είναι άνω φράγμα. Θα δείξουμε ότι είναι και το $\sup A$. Πράγματι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ρητός $q \in \mathbb{Q}$ με

$$e - \varepsilon < q < e$$

(οι ρητοί είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$). Τότε $q \in A$ και $q > e - \varepsilon$, άρα κανένα μικρότερο του e δεν μπορεί να είναι άνω φράγμα. Επομένως

$$\sup A = e.$$

Τέλος, επειδή $e \notin \mathbb{Q}$, έχουμε $e \notin A$, άρα το A **δεν έχει μέγιστο**:

$$\max A \text{ δεν υπάρχει.}$$

$$\boxed{\inf A = \min A = 1, \qquad \sup A = e, \qquad \max A \text{ δεν υπάρχει.}}$$

22. ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Σεπ 2024-2025

Θέμα 5.(i)

Εκφώνηση. Αν $|r| < 1$, δείξτε ότι
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}.$$

Λύση (γεωμετρική πρόοδος).
Θέτουμε τα μερικά αθροίσματα
$$S_N = \sum_{n=0}^{N} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^N.$$

Πολλαπλασιάζουμε με $1-r$:
$$(1-r)S_N = (1 + r + r^2 + \cdots + r^N) - (r + r^2 + \cdots + r^{N+1}) = 1 - r^{N+1}.$$

Άρα
$$S_N = \frac{1 - r^{N+1}}{1-r}.$$

Επειδή $|r| < 1$, έχουμε $r^{N+1} \to 0$ όταν $N \to \infty$. Επομένως
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}.$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1).}$$

$\square$

Θέμα 5.(ii)

Εκφώνηση. Έστω ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$x + 1 \le f(x) \le x^2 + x + 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Δείξτε ότι

$$f(0) = 1 \quad \text{και} \quad f'(0) = 1.$$

Λύση.
(1) Υπολογισμός του $f(0)$. Θέτουμε $x = 0$ στην ανισότητα:

$$0 + 1 \le f(0) \le 0^2 + 0 + 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \le f(0) \le 1.$$

Άρα

$$\boxed{f(0) = 1.}$$

(2) Υπολογισμός του $f'(0)$.
Από την υπόθεση, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 1 \le f(x) \le x^2 + x + 1.$$

Αφαιρούμε $1 = f(0)$ από όλα τα μέλη:

$$x \le f(x) - f(0) \le x^2 + x.$$

Για $x > 0$: διαιρούμε με $x > 0$ και παίρνουμε

$$1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq x + 1.$$

Περνώντας στο όριο $x \to 0^+$,

$$1 \leq \liminf_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq \limsup_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 1,$$

άρα

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

Για $x < 0$: διαιρούμε με $x < 0$ και αντιστρέφονται οι ανισότητες:

$$1 \geq \frac{f(x) - f(0)}{x} \geq x + 1.$$

Δηλαδή ισοδύναμα

$$x + 1 \leq \frac{f(x) - f(0)}{x} \leq 1.$$

Περνώντας στο όριο $x \to 0^-$, παίρνουμε

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

Αφού τα μονόπλευρα όρια είναι ίσα, υπάρχει το όριο και ισούται με 1, άρα

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

$$\boxed{f(0) = 1 \ \text{ και } \ f'(0) = 1.}$$

$\square$