

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Επιμέλεια Σερετίδης Αναστάσιος

Μαθητής/τρια:

Σχόλια / Παρατηρήσεις

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν υποστηρικτικό εκπαιδευτικό υλικό και αποσκοπούν στην κατανόηση της μεθοδολογίας, την εξάσκηση στην τεχνική επίλυσης και την ενίσχυση της προετοιμασίας των μαθητών μέσω επιλεγμένων εφαρμογών και ασκήσεων.

Ολοκλήρωση κατά παράγοντες

Λυμένες ασκήσεις και ασκήσεις εξάσκησης

Βασική θεωρία

Για παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g στο $[\alpha, \beta]$, ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx$$

Η σχέση αυτή είναι η **ολοκλήρωση κατά παράγοντες**.

Η μέθοδος εφαρμόζεται κυρίως όταν στο ολοκλήρωμα εμφανίζεται γινόμενο δύο παραστάσεων και μία από αυτές απλοποιείται όταν παραγωγίζεται.

Παρατήρηση

Συχνές περιπτώσεις στις οποίες χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$xe^x, \quad x \eta \mu x, \quad x \sigma \upsilon \nu x, \quad \ln x, \quad x^2 e^x$$

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στην επιλογή των παραγόντων, ώστε το νέο ολοκλήρωμα που θα προκύψει να είναι απλούστερο.

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 xe^x dx$$

Θεωρούμε:

$$f(x) = x \quad \text{και} \quad g'(x) = e^x$$

Τότε:

$$f'(x) = 1 \quad \text{και} \quad g(x) = e^x$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο της ολοκλήρωσης κατά παράγοντες:

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

Υπολογίζουμε:

$$[xe^x]_0^1 = 1 \cdot e - 0 = e$$

και

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 = e - 1$$

Άρα:

$$\int_0^1 x e^x dx = e - (e - 1) = 1$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int_0^1 x e^x dx = 1$$

Άσκηση 2

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^\pi x \eta\mu x dx$$

Θεωρούμε:

$$f(x) = x \quad \text{και} \quad g'(x) = \eta\mu x$$

Τότε:

$$f'(x) = 1 \quad \text{και} \quad g(x) = -\sigma\upsilon\nu x$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$\int_0^\pi x \eta\mu x dx = [-x \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi + \int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x dx$$

Υπολογίζουμε:

$$[-x \sigma\upsilon\nu x]_0^\pi = (-\pi \sigma\upsilon\nu \pi) - (0 \cdot \sigma\upsilon\nu 0) = -\pi(-1) - 0 = \pi$$

και

$$\int_0^\pi \sigma\upsilon\nu x dx = [\eta\mu x]_0^\pi = 0 - 0 = 0$$

Άρα:

$$\int_0^\pi x \eta\mu x dx = \pi$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int_0^\pi x \eta\mu x dx = \pi$$

Άσκηση 3

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_1^e \ln x dx$$

Γράφουμε:

$$\int_1^e \ln x dx = \int_1^e 1 \cdot \ln x dx$$

Θεωρούμε:

$$f(x) = \ln x \quad \text{και} \quad g'(x) = 1$$

Τότε:

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = x$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες:

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

Άρα:

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx$$

Υπολογίζουμε:

$$[x \ln x]_1^e = e \ln e - 1 \ln 1 = e \cdot 1 - 0 = e$$

και

$$\int_1^e 1 \, dx = [x]_1^e = e - 1$$

Επομένως:

$$\int_1^e \ln x \, dx = e - (e - 1) = 1$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\boxed{\int_1^e \ln x \, dx = 1}$$

Άσκηση 4

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx$$

Θεωρούμε:

$$f(x) = x^2 \quad \text{και} \quad g'(x) = e^x$$

Τότε:

$$f'(x) = 2x \quad \text{και} \quad g(x) = e^x$$

Άρα:

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx$$

Δηλαδή:

$$\int_0^1 x^2 e^x \, dx = e - 2 \int_0^1 x e^x \, dx$$

Από την Άσκηση 1 γνωρίζουμε ότι:

$$\int_0^1 x e^x \, dx = 1$$

Άρα:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

Άσκηση 5

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{\pi} x \sigma\upsilon\nu x dx$$

Θεωρούμε:

$$f(x) = x \quad \text{και} \quad g'(x) = \sigma\upsilon\nu x$$

Τότε:

$$f'(x) = 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \eta\mu x$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο:

$$\int_0^{\pi} x \sigma\upsilon\nu x dx = [x \eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \eta\mu x dx$$

Υπολογίζουμε:

$$[x \eta\mu x]_0^{\pi} = \pi \eta\mu \pi - 0 \cdot \eta\mu 0 = 0$$

και

$$\int_0^{\pi} \eta\mu x dx = [-\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 2$$

Άρα:

$$\int_0^{\pi} x \sigma\upsilon\nu x dx = 0 - 2 = -2$$

Τελικό αποτέλεσμα:

$$\int_0^{\pi} x \sigma\upsilon\nu x dx = -2$$

Σύντομες παρατηρήσεις

- Όταν έχουμε γινόμενο πολυωνύμου με e^x , $\eta\mu x$, $\sigma\upsilon\nu x$, συνήθως επιλέγουμε ως $f(x)$ το πολυώνυμο.
- Όταν εμφανίζεται $\ln x$, γράφουμε το ολοκλήρωμα στη μορφή

$$\int 1 \cdot \ln x dx$$

ώστε να εφαρμόσουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

- Στόχος είναι το νέο ολοκλήρωμα που προκύπτει να είναι απλούστερο από το αρχικό.

Άλυτες ασκήσεις για εξάσκηση

Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα:

1.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \eta\mu x \, dx$$

2.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sigma\upsilon\nu x \, dx$$

3.

$$\int_1^e x \ln x \, dx$$

4.

$$\int_0^1 x e^{2x} \, dx$$

5.

$$\int_0^2 x^2 e^x \, dx$$

6.

$$\int_1^{e^2} \ln x \, dx$$

7.

$$\int_0^{\pi} x^2 \eta\mu x \, dx$$

8.

$$\int_0^{\pi} x^2 \sigma\upsilon\nu x \, dx$$

Τέλος φυλλαδίου