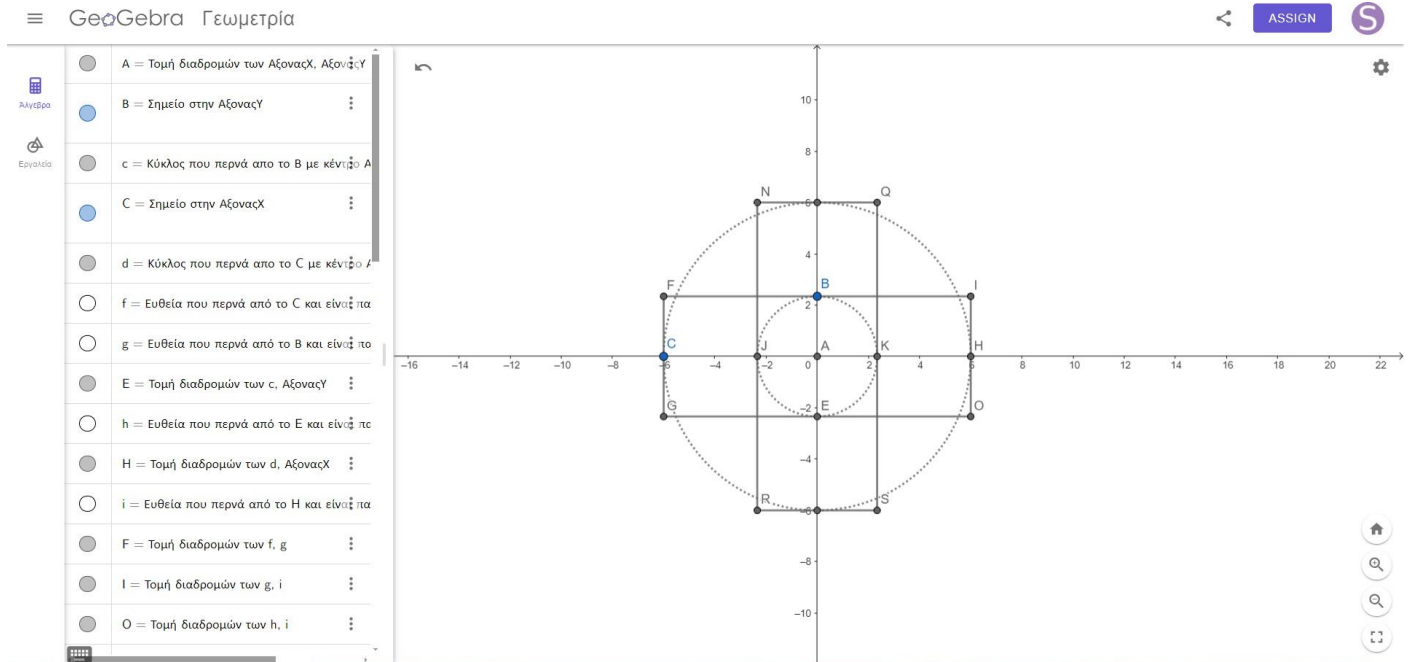


# ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

## ΓΝΩΡΙΜΙΑ ΜΕ ΤΟ GEOGEBRA

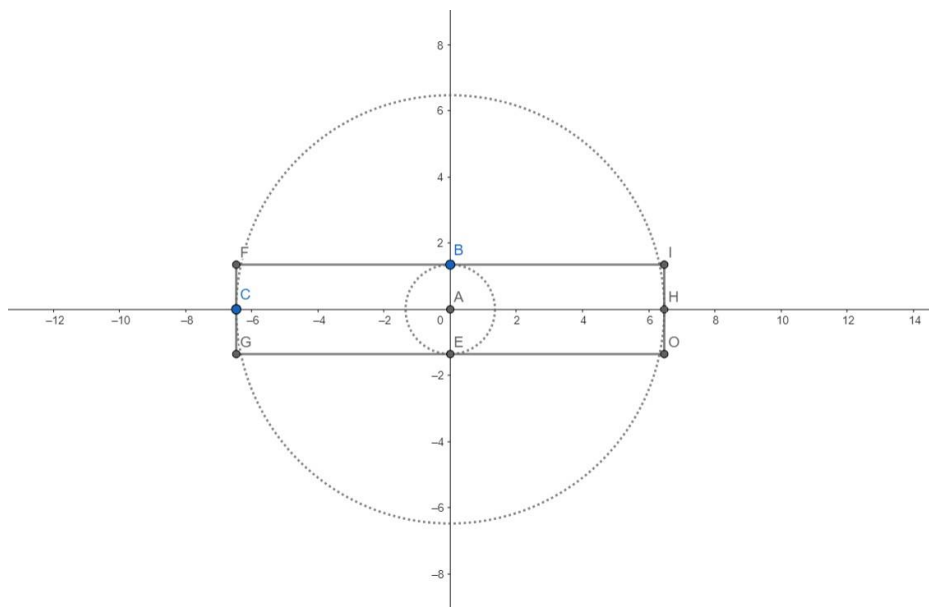
### Μέρος Πρώτο: Tutorial

Σχεδίαση διαγραμματικής κάτοψης εγγεγραμμένου σταυροειδούς ναού με τρούλο αποτελούμενου από δύο κλίτη, όπως αρχείο Geogebra με όνομα: **Ναός**.

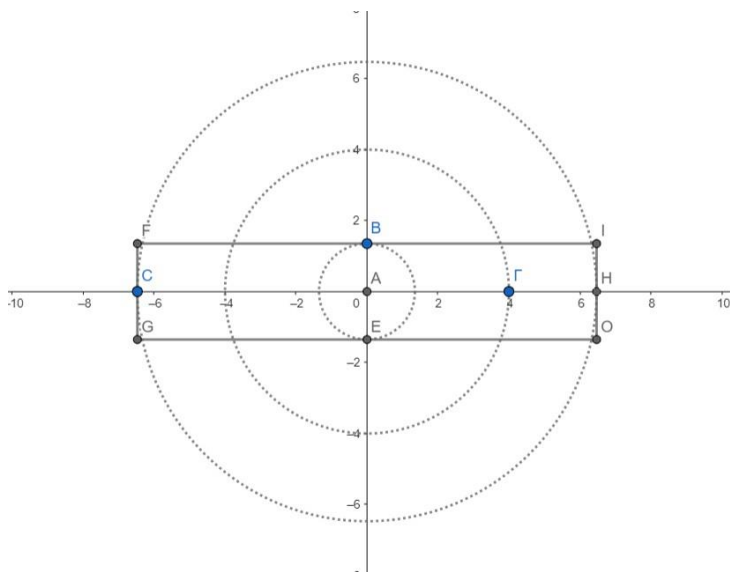


**Ερώτηση 1:** Πως θα έπρεπε να μεταβάλετε το σχέδιο σας ώστε τα δύο κλίτη να έχουν διαφορετικά μήκη;

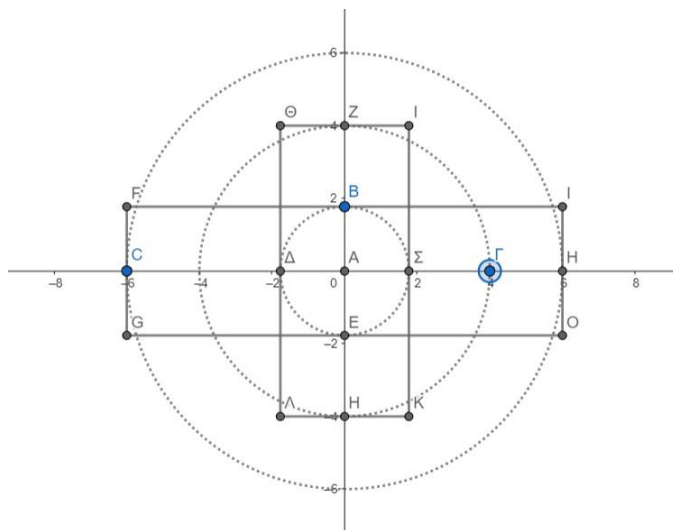
Αρχικά θα χρειαστεί να σβήσουμε κάποια σημεία και τμήματα που σχετίζονται με το ένα κλίτος (έστω το κατακόρυφο) οπότε θα έχουμε την επόμενο αρχικό σχέδιο:



Στη συνέχεια θα δημιουργήσουμε έναν νέο κύκλο με κέντρο το σημείο A και ακτίνα οριζόμενη από τυχαίο σημείο Γ επί του άξονα X όπως παρακάτω:

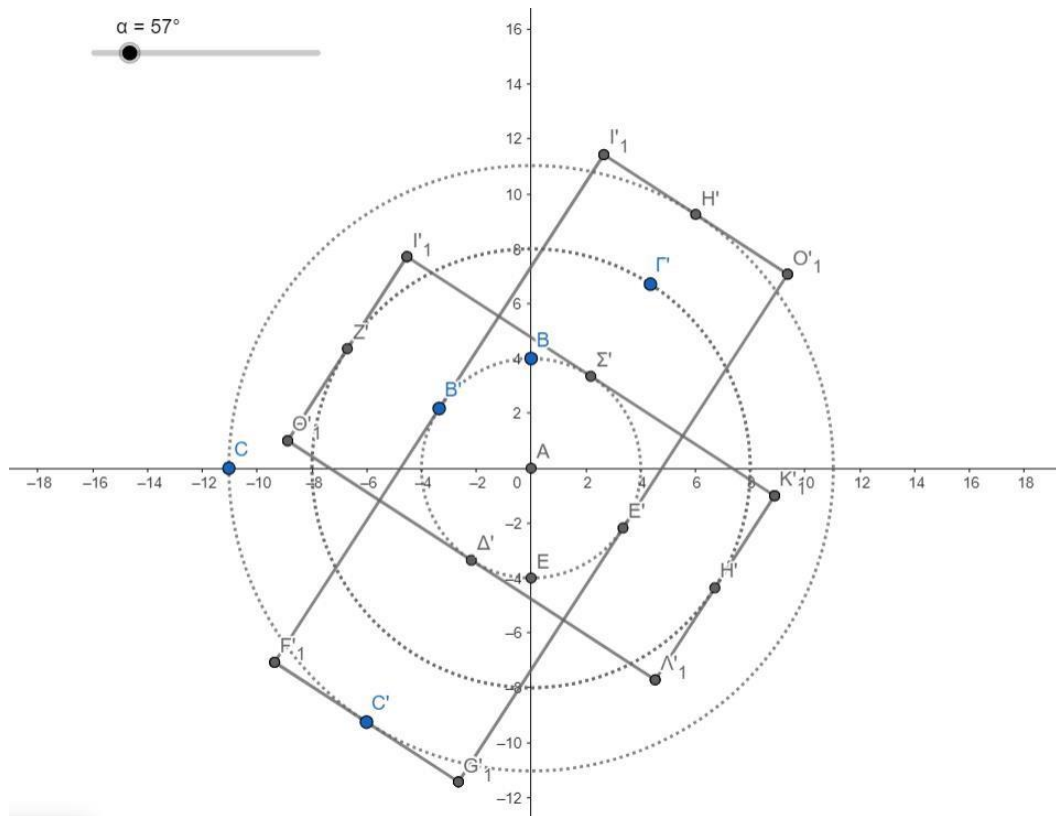


Εν συνεχεία σχεδιάζουμε ένα ορθογώνιο με κέντρο το σημείο A το οποίο θα αλλάζει το μήκος και πλάτος του με βάση τη θέση των σημείων Γ, B επί των αξόνων X,Y αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε το εργαλείο Parallel Line και δημιουργούμε 4 ευθείες (lines) εφαπτόμενες στους προαναφερθέντες κύκλους όπως στην επόμενη εικόνα και το αρχείο Geogebra με όνομα: **Ναός\_Ερώτηση\_1.:**



**Ερώτηση 2:** Πως θα έπρεπε να μεταβάλετε το σχέδιο σας ώστε ολόκληρος ο ναός να περιστραφεί ελεύθερα γύρω από το κέντρο του τρούλου (είτε με γωνία η οποία ορίζεται ως slider είτε με σημείο το οποίο ολισθαίνει ελεύθερα πάνω στην περιφέρεια του κύκλου);

Αρχικά θα δημιουργήσουμε έναν δρομέα (slider) τον οποίο θα ονομάσουμε α και αφετέρου επιλέγουμε τις τιμές της γωνίας του από 0 έως 360 μοίρες. Στη συνέχεια επιλέγουμε «μετασχηματισμός στροφή αντικειμένου», επιλέγουμε ολόκληρο το σχήμα και κλικάρουμε στο κέντρο του τρούλου. Ως γωνία επιλέγουμε την παράμετρο α (δρομέας). Αν σύρουμε τον δρομέα στην τιμή των  $57^\circ$  προκύπτει το επόμενο σχήμα το οποίο αποτελεί το αρχείο Geogebra με όνομα: **Ναός\_Ερώτηση\_2:**

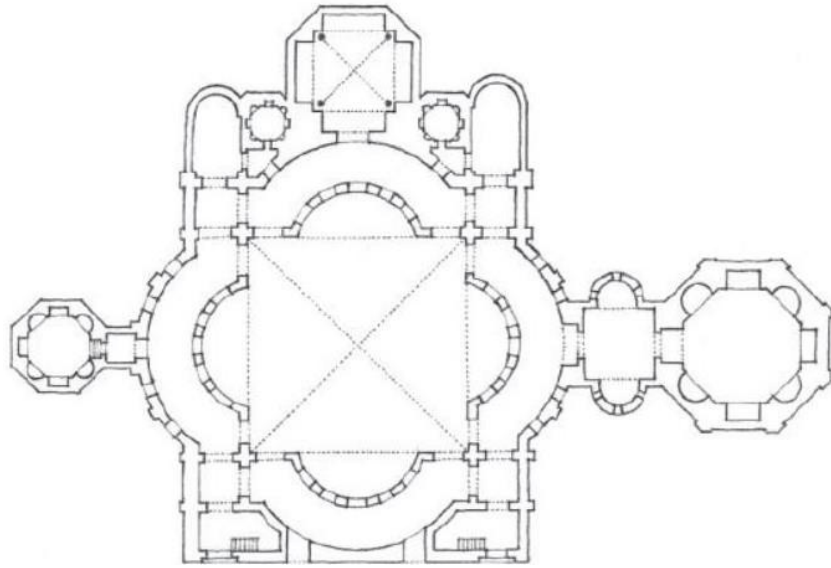


## Μέρος Δεύτερο: Εφαρμογή/Σχεδιασμός

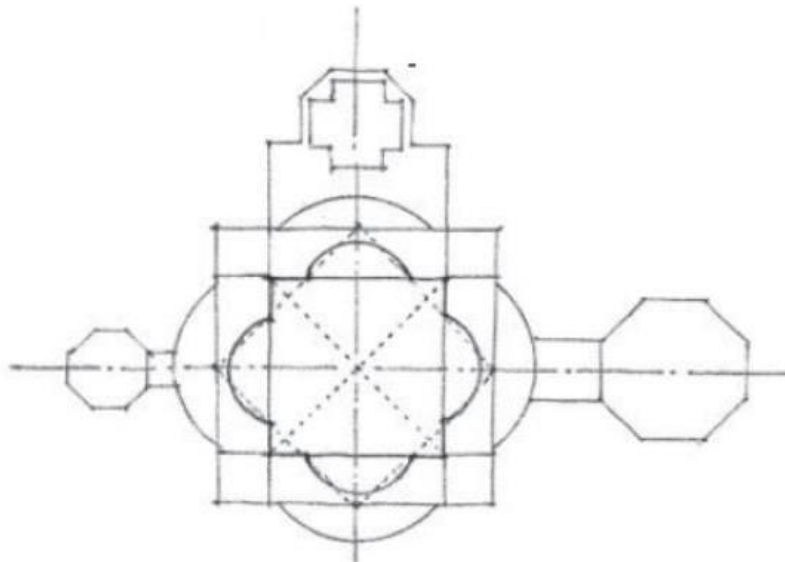
Στο παρόν μέρος της εργασίας θα πραγματοποιηθεί παραμετρικός σχεδιασμός της κάτοψης του κτηρίου San Lorenzo Maggiore (Μιλάνο, Ιταλία, περ. 480 μ.Χ.), με την προσθήκη κάποιων τροποποιήσεων βάσει πρωτοβουλιών.



Η κάτοψη σε μη παραμετρική μορφή είναι όπως παρακάτω:

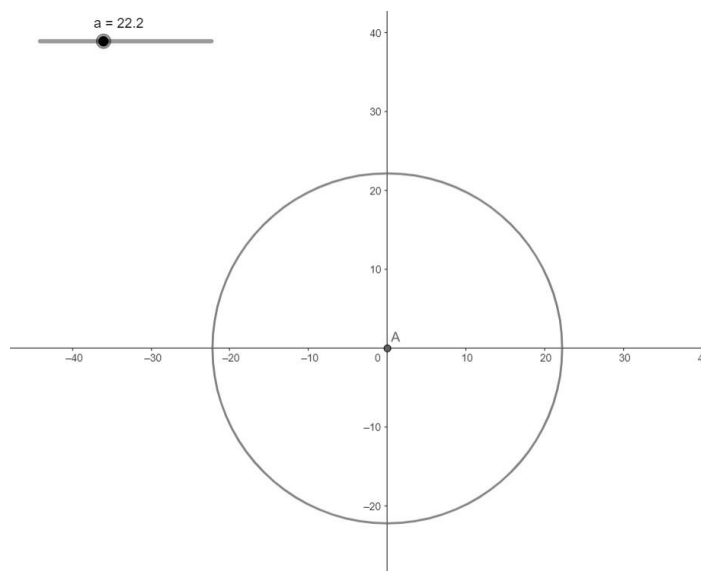


και σε απλούστερη μορφή:



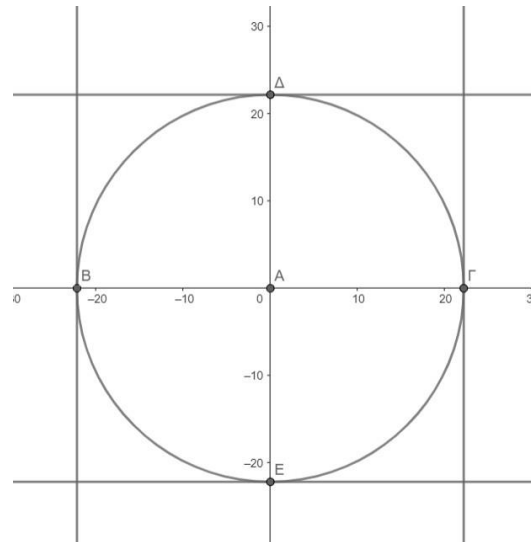
### 1<sup>ο</sup> Βήμα

Σχεδιάζουμε έναν κύκλο με ακτίνα που μεταβάλετε με slider.



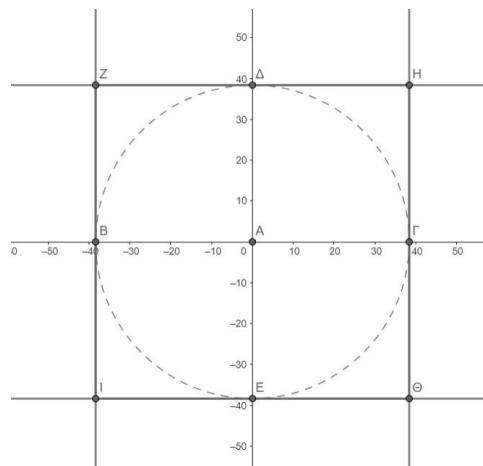
## 2<sup>ο</sup> Βήμα

Φέρνουμε παράλληλες που εφάπτονται στον κύκλο έτσι ώστε να σχηματίσουμε τετράγωνο σχήμα.



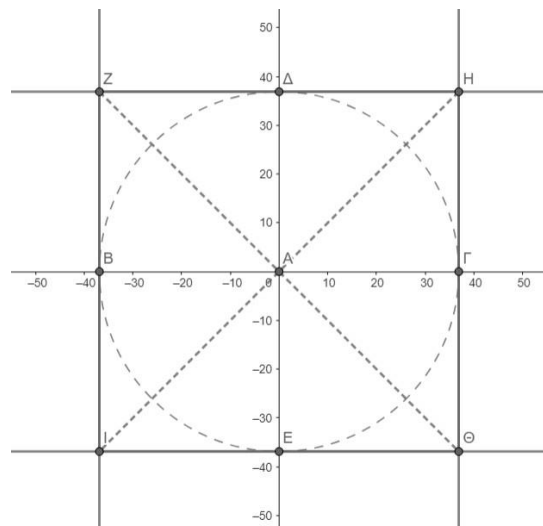
## 3<sup>ο</sup> Βήμα

Τοποθετούμε σημεία στις κορυφές του τετραγώνου και αλλάζουμε το στυλ της περιφέρειας του κύκλου.



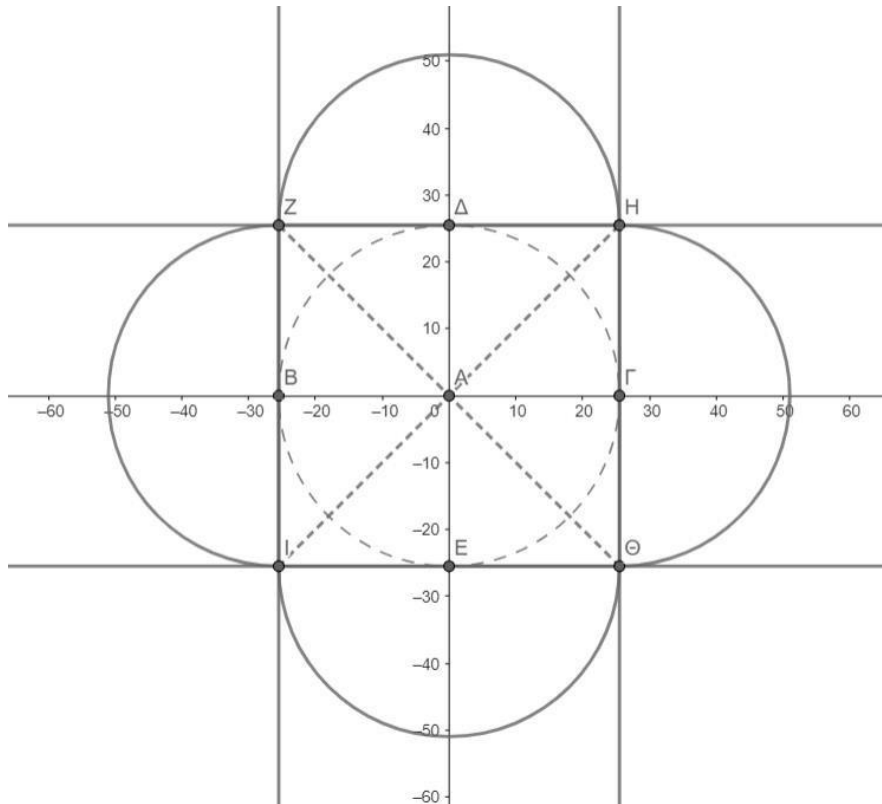
## 4<sup>ο</sup> Βήμα

Φέρνουμε τις διαγώνιους του τετραγώνου που σχηματίσαμε.



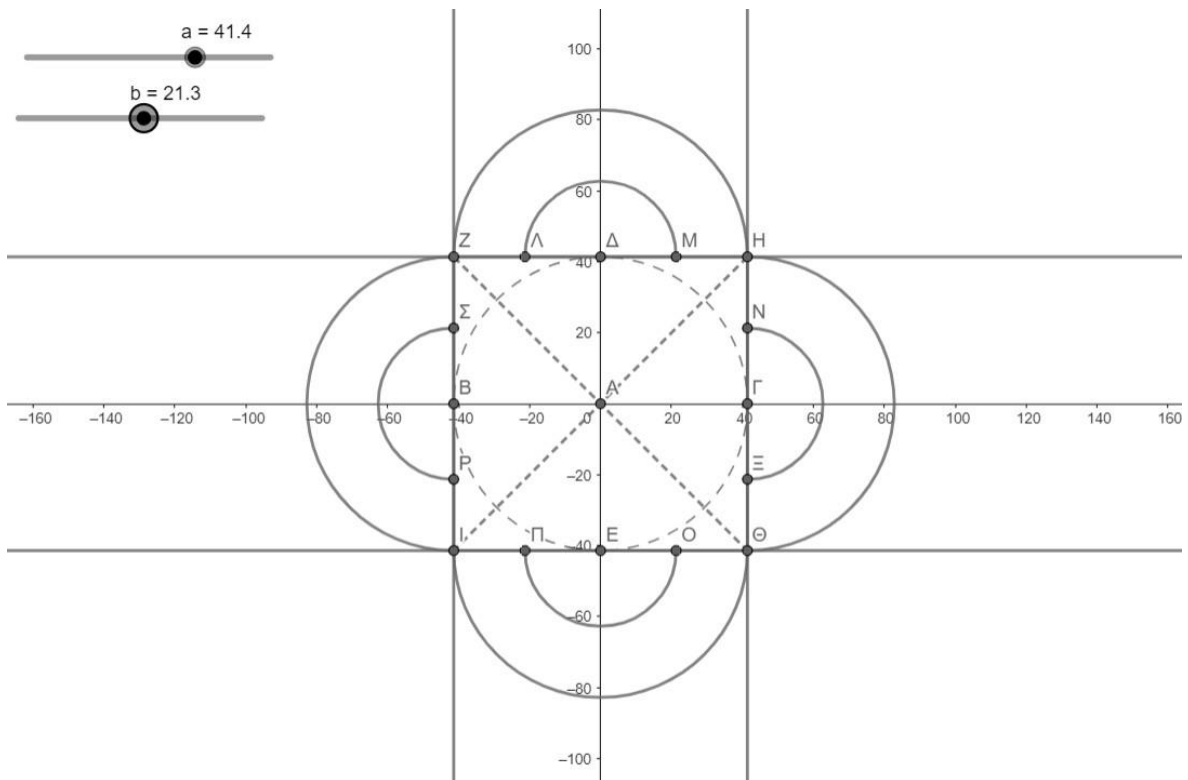
## 5<sup>ο</sup> Βήμα

Κατασκευάζουμε ημικύκλια με κέντρα τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου.



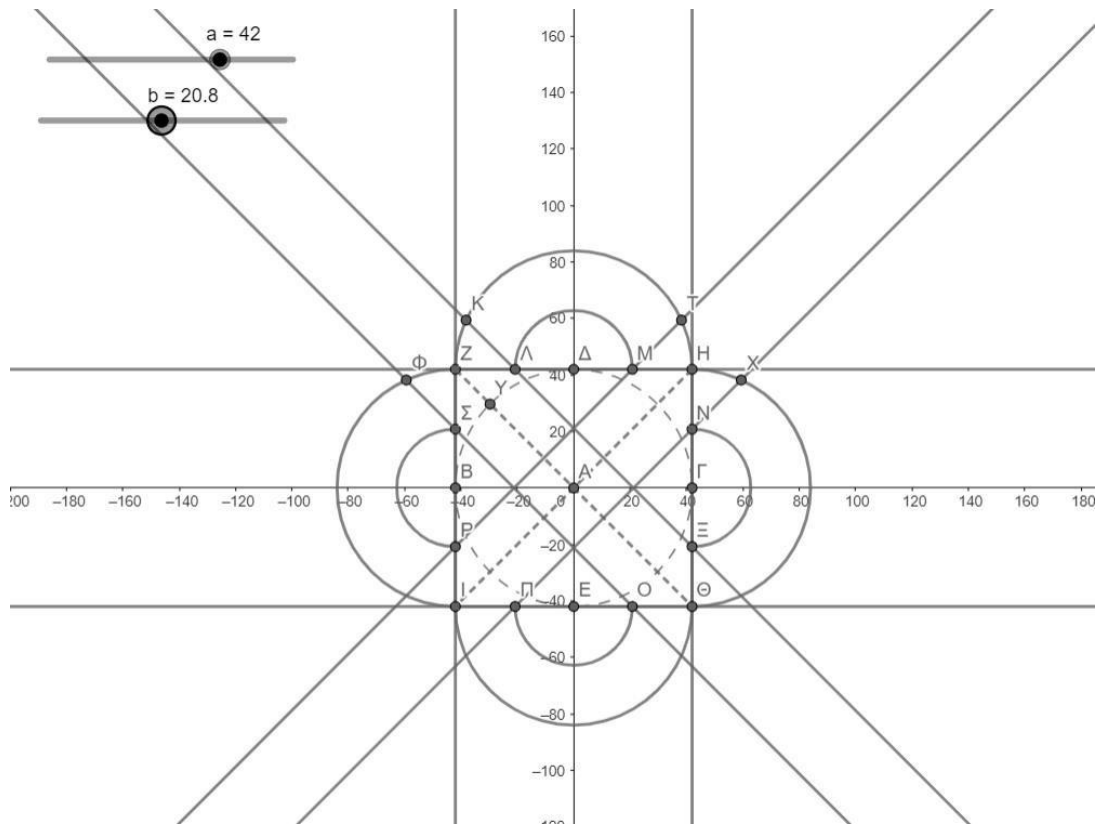
## 6<sup>ο</sup> Βήμα

Κατασκευάζουμε μικρότερα ημικύκλια με κέντρα τα μέσα των πλευρών του τετραγώνου και ακτίνα η οποία μεταβάλλεται με slider. Η μεταβολή επηρεάζει όλα τα εσωτερικά ημικύκλια.



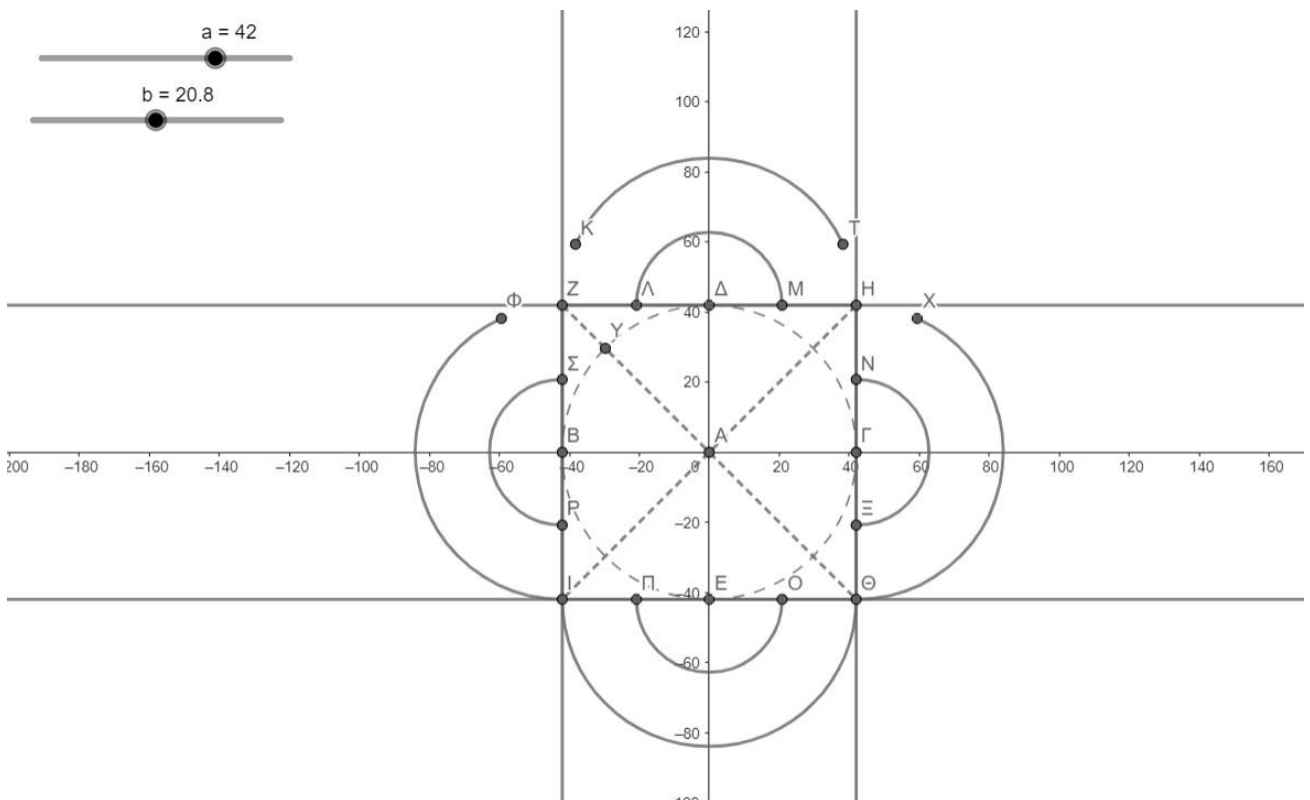
### 7<sup>ο</sup> Βήμα

Σχεδιάζουμε παράλληλες ευθείες που περνάνε από τα άκρα των εσωτερικών ημικυκλίων και είναι παράλληλες στις διαγώνιους του τετραγώνου και τοποθετούμε σημεία εκεί που οι ευθείες αυτές τέμνουν τα μεγαλύτερα ημικύκλια.



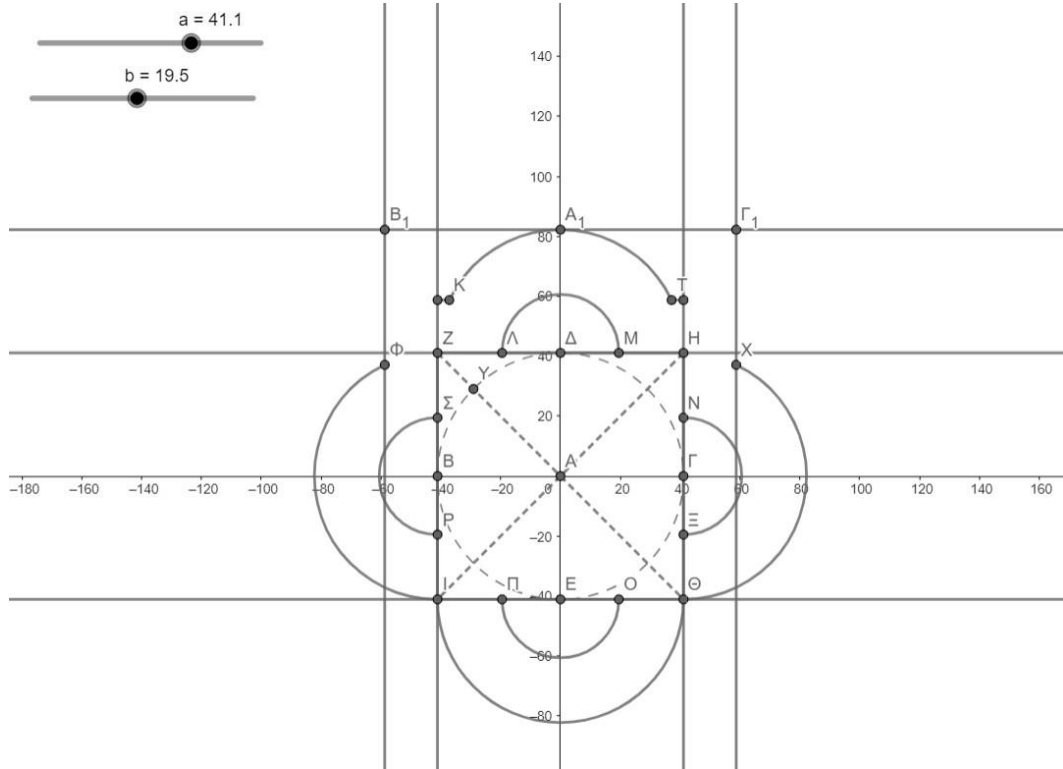
### 8<sup>ο</sup> Βήμα

Απαλείφουμε τα μικρότερα τόξα που σχηματίστηκαν από τα προαναφερθέντα σημεία τομής.



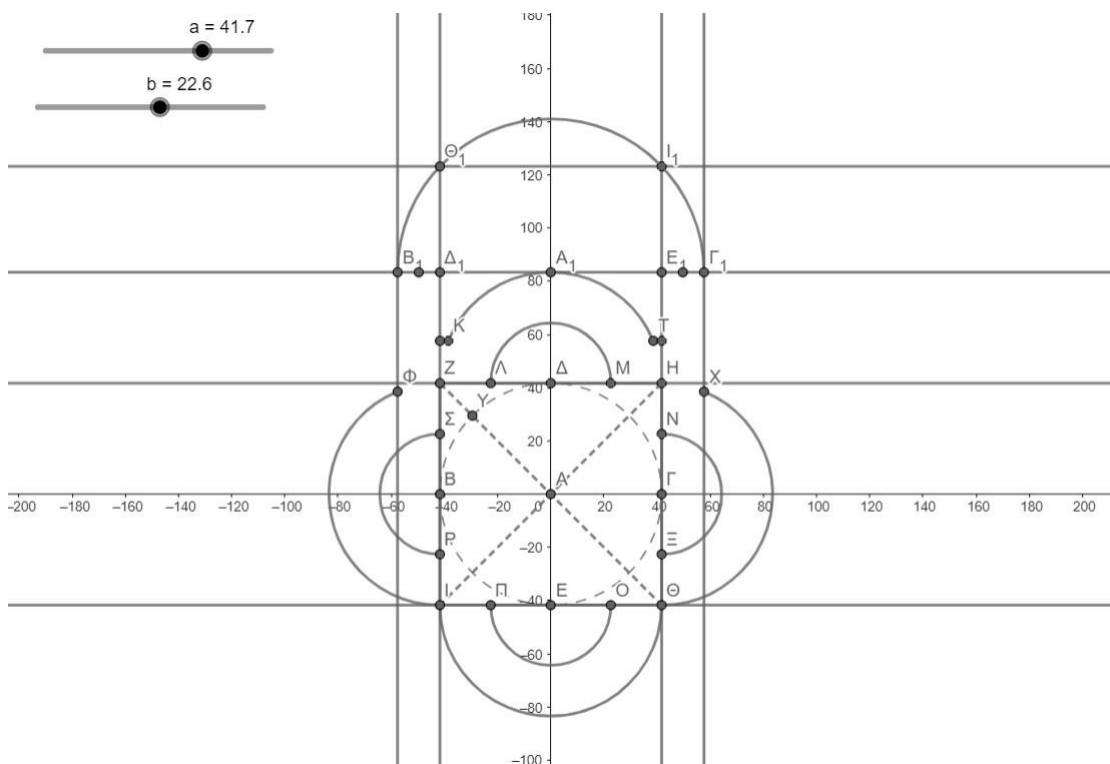
## 9<sup>ο</sup> Βήμα

Φέρνουμε παράλληλες στον κάθετο άξονα οι οποίες διέρχονται από τα σημεία Φ και Χ και ενώνουμε τα μεγάλα άνω και κάτω ημικύκλια (άκρα) με τις κάθετες ευθείες του προηγούμενου σχήματος. Επίσης φέρνουμε τις εφαπτόμενες ευθείες από τα άνω και κάτω ημικύκλια και τοποθετούμε σημεία εκεί που αυτές τέμνονται με αναφερθέντες νέες ευθείες που σχεδιάσαμε.



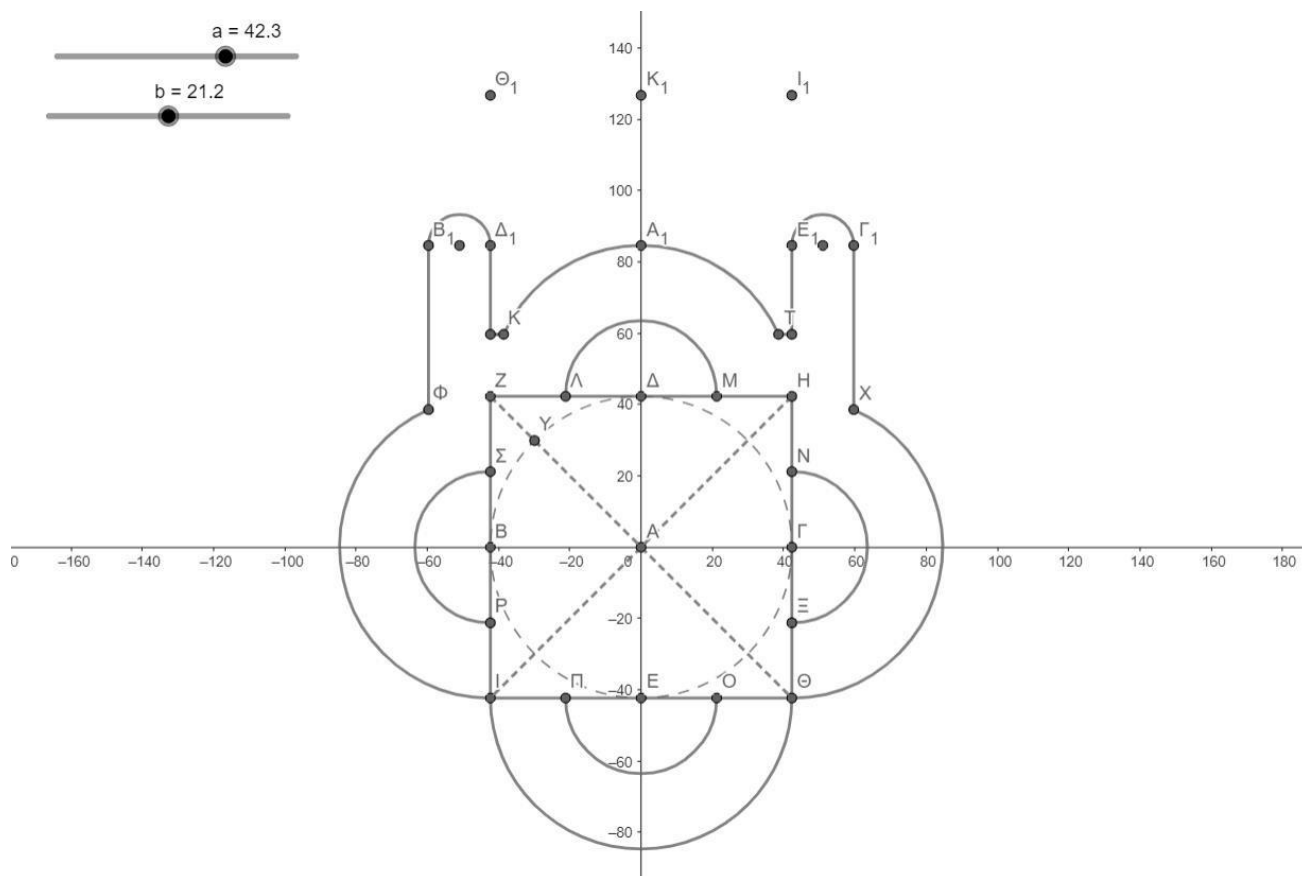
## 10<sup>ο</sup> Βήμα

Κατασκευάζουμε το μεγάλο ημικύκλιο που έχει άκρα τα Β<sub>1</sub> και Γ<sub>1</sub> σημεία τομής και τοποθετούμε σημεία Θ<sub>1</sub> και Ι<sub>1</sub> εκεί που αυτό τέμνει τις εσωτερικές κατακόρυφες ευθείες.



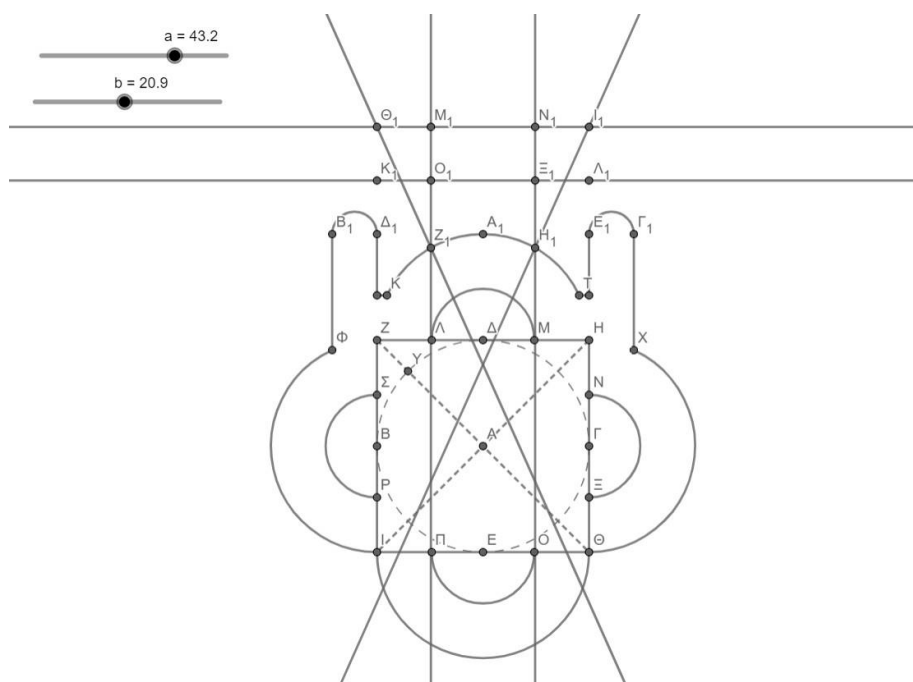
## 11<sup>ο</sup> Βήμα

Απαλείφουμε το προηγούμενο μεγάλο ημικύκλιο. Κατασκευάζουμε τα μικρά ημικύκλια που έχουν κέντρα τα μέσα των τμημάτων  $B_1, \Delta_1$  και  $E_1, \Gamma_1$ .



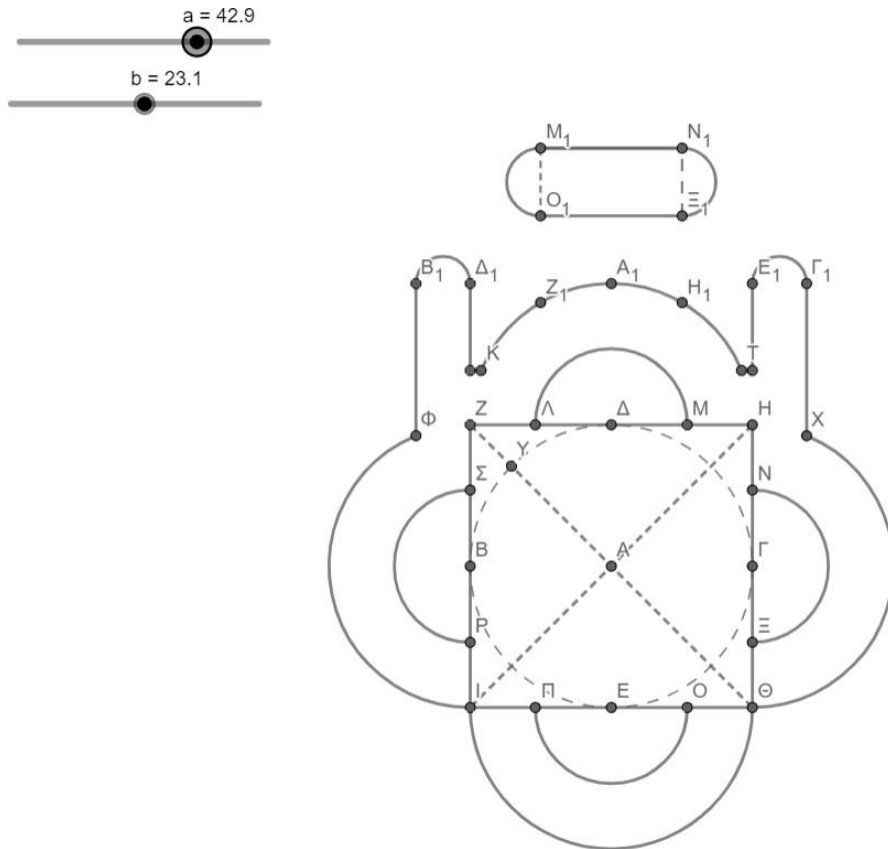
## 12<sup>ο</sup> Βήμα

Φέρνουμε κατακόρυφες ευθείες από τα σημεία  $\Lambda$  και  $M$  και τοποθετούμε σημεία  $Z_1, H_1$  επί του άνω ημικυκλίου. Φέρνουμε τα μέσα  $\Delta_1, \Theta_1$  και  $E_1, I_1$  και τοποθετούμε σημεία  $K_1$  και  $\Lambda_1$ . Φέρνουμε ευθεία που να περνάει από αυτά τα 2 τελευταία σημεία και κατασκευάζουμε το ορθογώνιο  $M_1, N_1, \Xi_1, O_1$ .



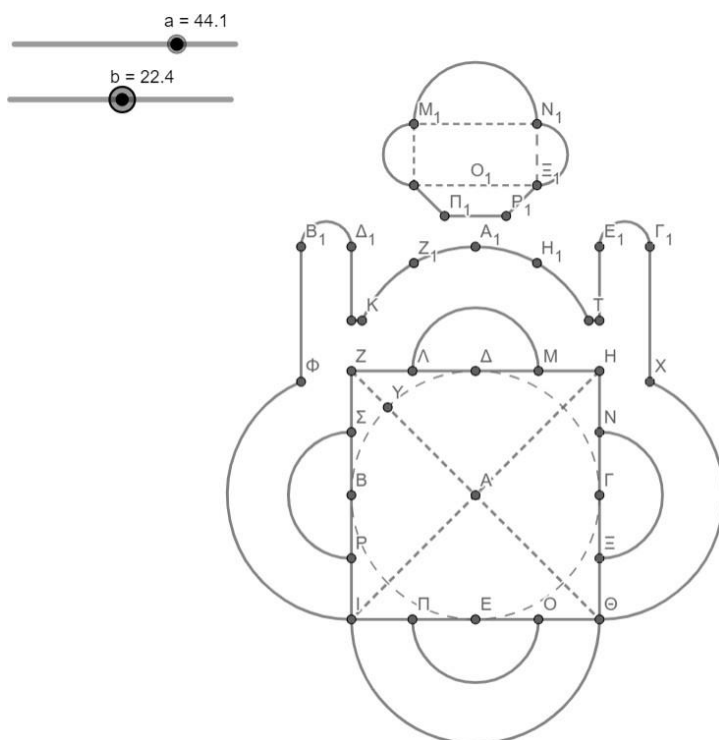
### 13<sup>ο</sup> Βήμα

Φέρνουμε τα πλάγια ημικύκλια του προηγούμενου ορθογωνίου που κατασκευάσαμε και απαλείφουμε της ευθείες για αισθητικούς λόγους.



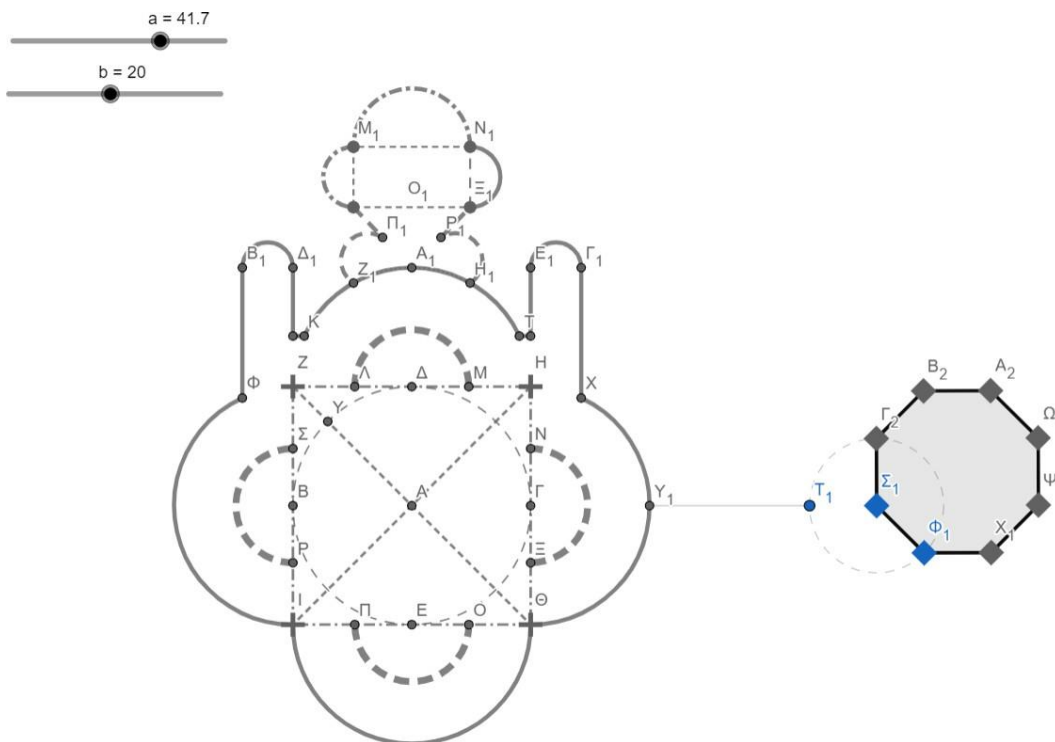
### 14<sup>ο</sup> Βήμα

Κατασκευάζουμε τα κάτω πολυφωνικό σχήμα του ορθογωνίου και το άνω ημικύκλιο.



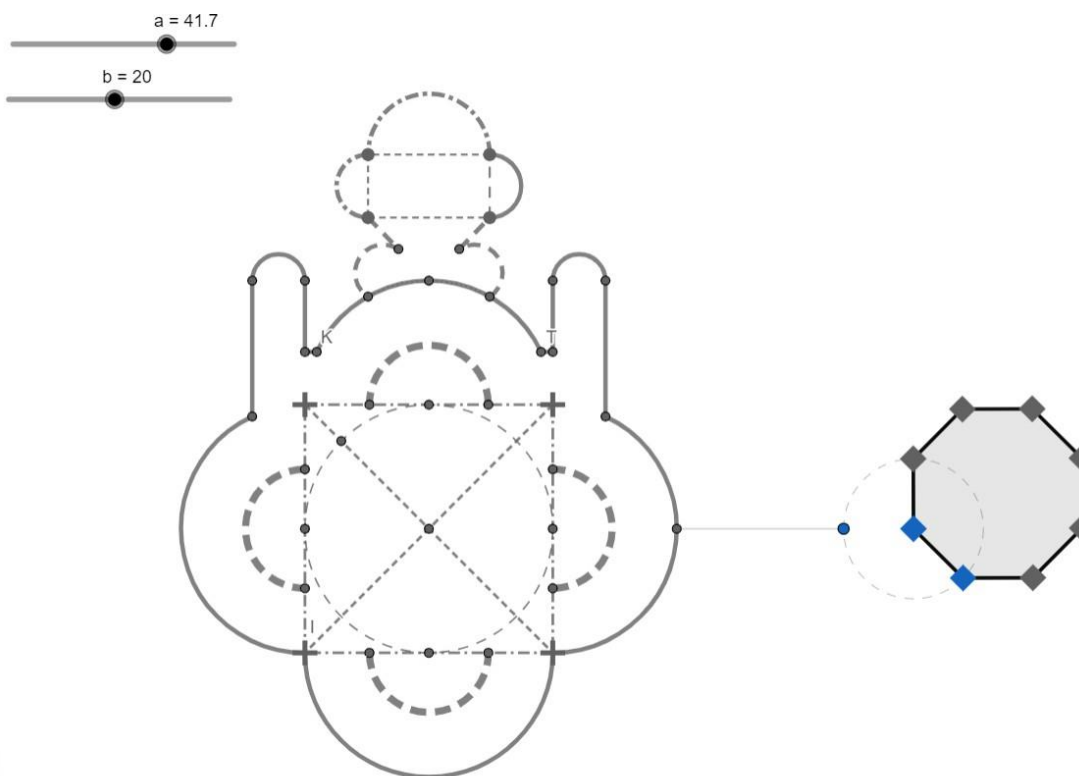
### 15<sup>ο</sup> Βήμα

Διαμορφώνουμε την εξωτερική όψη της παραμετρικής κάτοψης με κατάλληλο πάχος και μορφή και κατασκευάζουμε το οκτάγωνο δεξιά το οποίο μπορεί να περιστρέφεται από το σημείο  $\Phi_1$  και να αλλάζει μέγεθος από το σημείο  $\Sigma_1$  απομακρυνόμενο και ερχόμενο εγγύτερα στην αριστερή κάτοψη.



### 16<sup>ο</sup> Βήμα

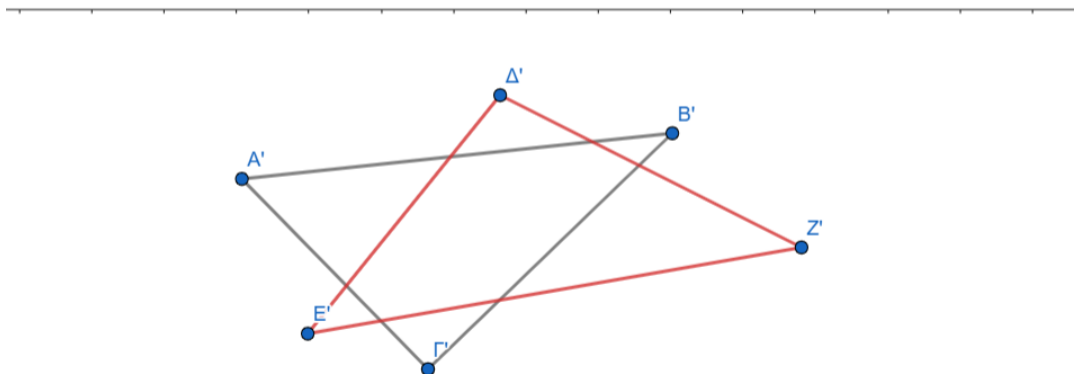
Απαλείφουμε τελείως τις ετικέτες.



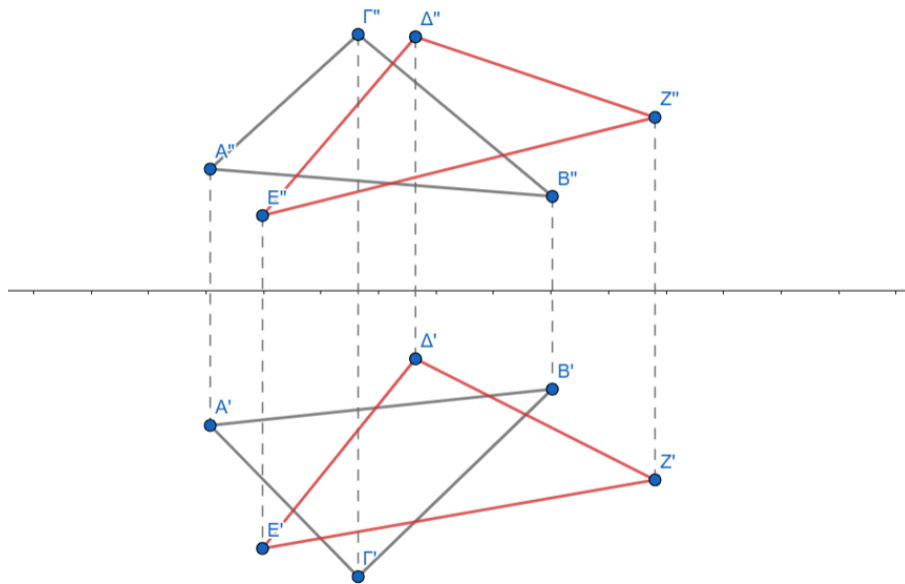
### Μέρος Τρίτο: Αναλυτική Επίλυση Προβλημάτων

**Πρόβλημα 1.** Να βρεθεί η αλληλοτομία στο χώρο δύο τυχαίων επιπέδων ή τριγώνων οριζόμενων από τρία σημεία το καθένα.

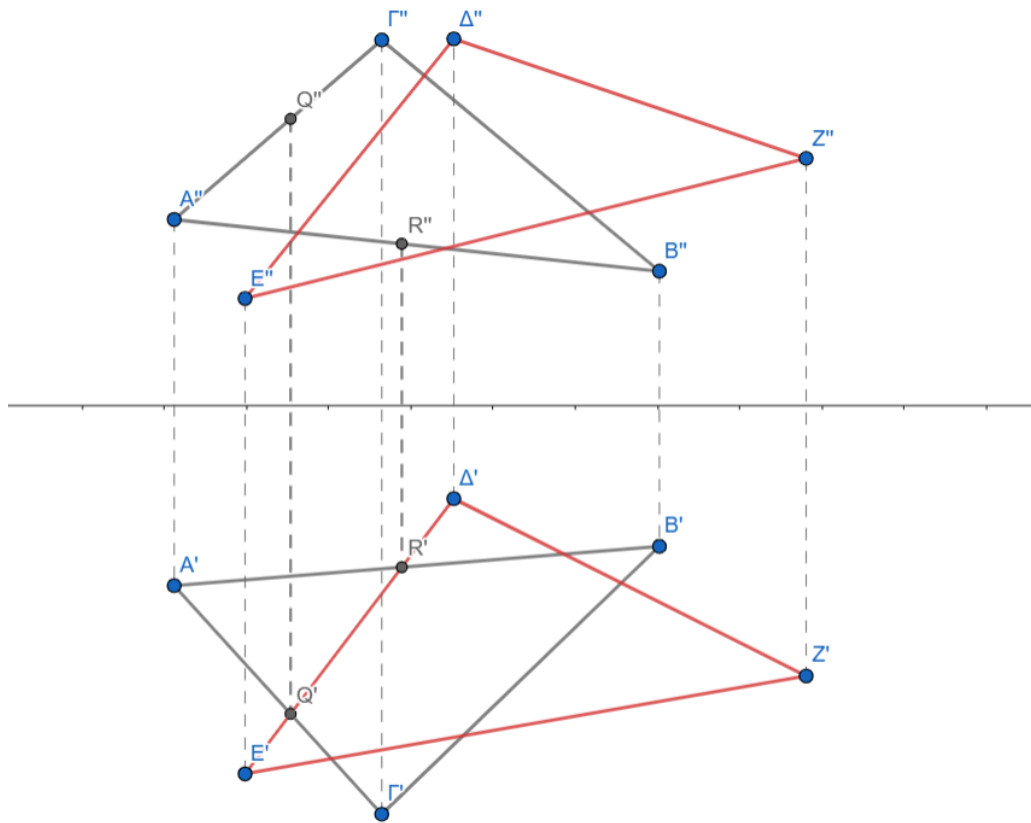
Κατασκευάζουμε τα δυο επίπεδα στην πρώτη προβολή όπως το παρακάτω σχήμα.



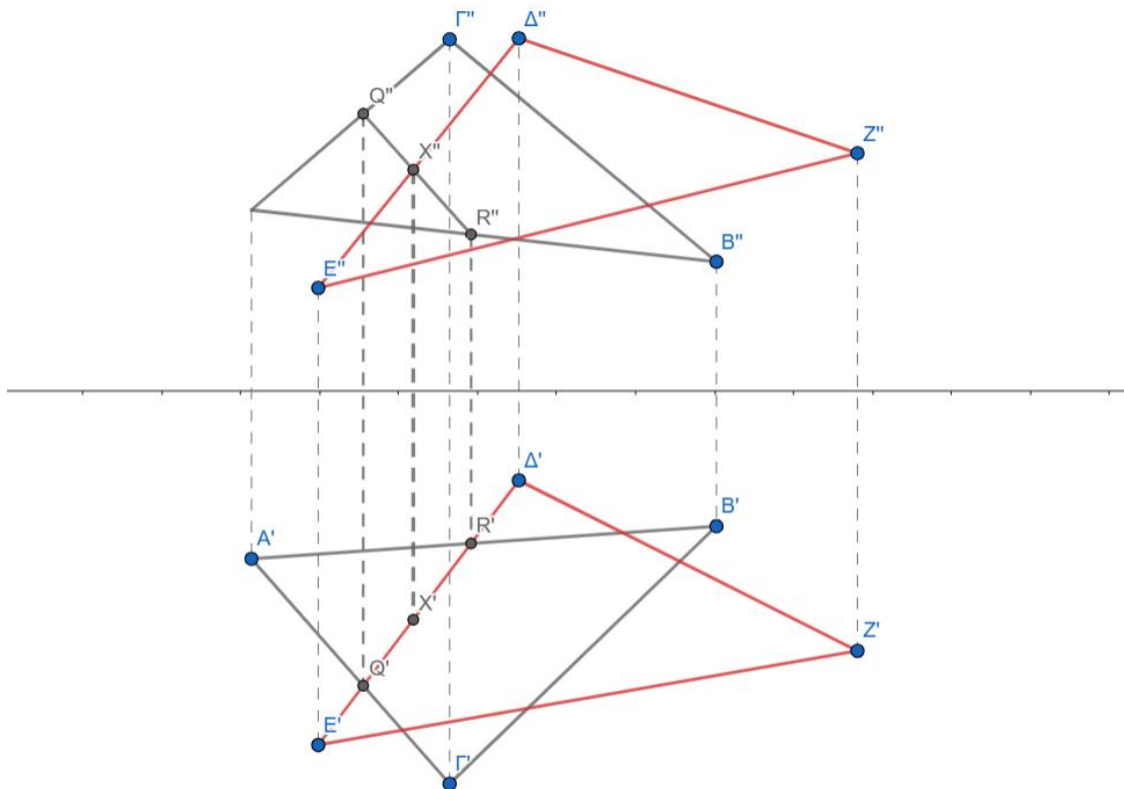
Κατασκευάζουμε τα δυο επίπεδα στην δεύτερη προβολή όπως το παρακάτω σχήμα.



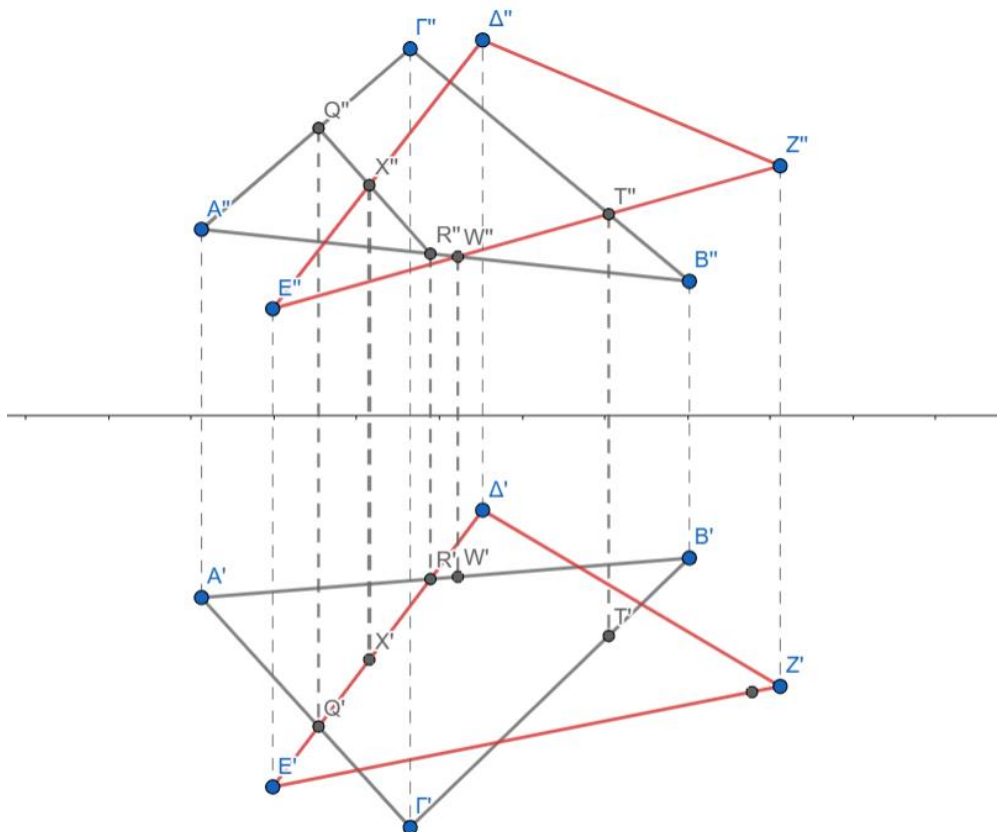
Βρίσκουμε τα σημεία τομής  $Q'$  και  $R'$  των ευθειών του πρώτου επιπέδου  $E'\Delta'$  με  $A'\Gamma'$  και  $A'B'$  και στη συνέχεια βρίσκουμε τις δεύτερες προβολές τους  $Q''$  και  $R''$  που θα είναι πάνω στο επίπεδο  $A''B''\Gamma''$ .



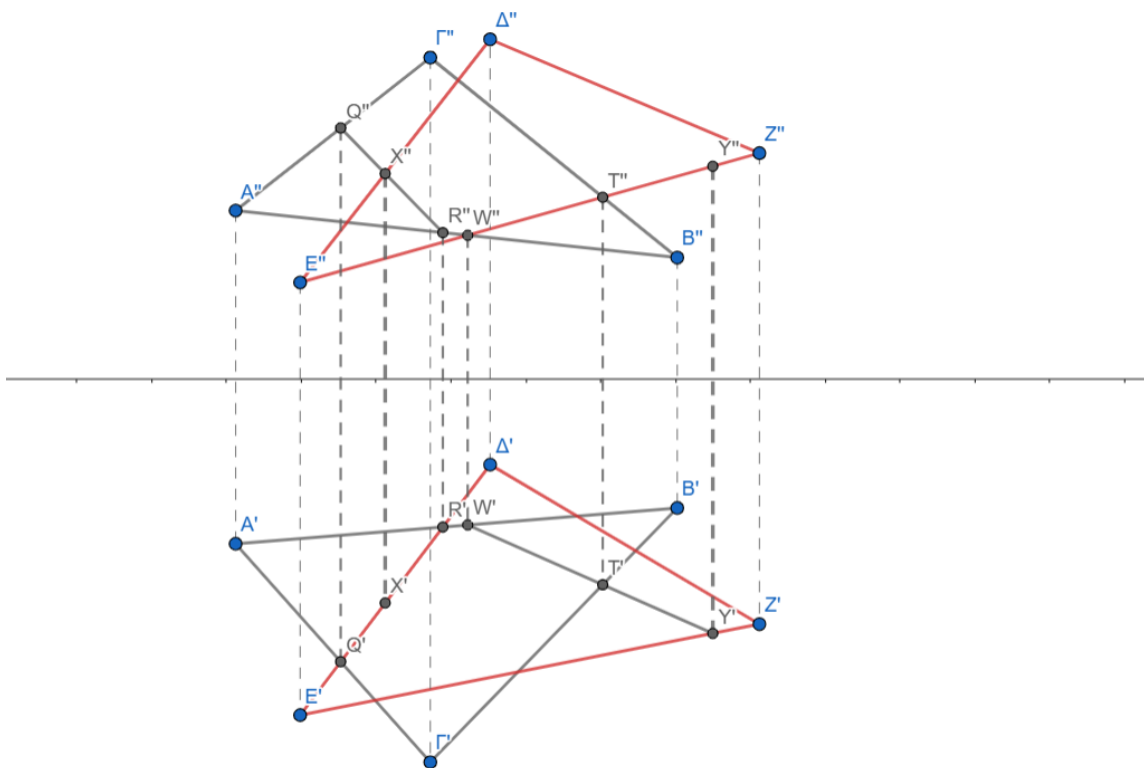
Στη συνέχεια φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα  $Q''R''$  και το σημείο τομής του με το τμήμα  $E''\Delta''$  είναι το σημείο  $X''$ . Η πρώτη προβολή του  $X$  είναι το  $X'$  το οποίο βρίσκεται στην τομή της κάθετης ευθείας από το  $X''$  στην ευθεία  $E'\Delta'$ .



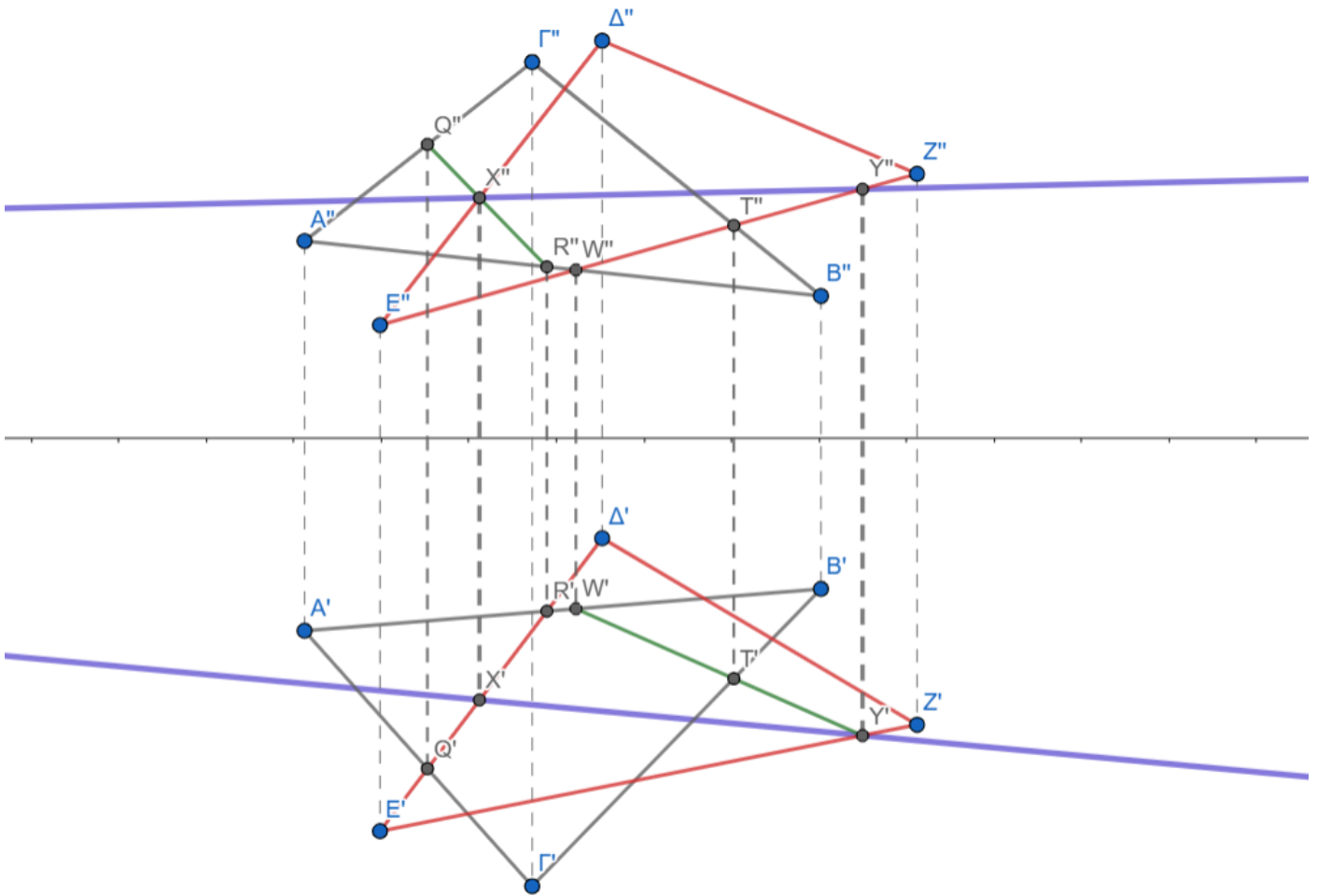
Στη συνέχεια βρίσκουμε τα σημεία τομής  $W''$  και  $T''$  του ευθύγραμμου τμήματος  $E''Z''$  με τα  $A''B''$  και  $\Gamma''B''$ . Βρίσκουμε τα αντίστοιχα σημεία  $W'$   $T'$  στην πρώτη προβολή.



Ακολουθως βρίσκουμε το σημείο τομής  $Y'$  της ευθείας  $W'T'$  με την ευθεία  $E'Z'$ . Από το  $Y'$  φέρνουμε κάθετη στον άξονα  $Y_{12}$  και έτσι βρίσκουμε την δεύτερη προβολή του  $Y''$  επί της ευθείας  $E''Z''$ .

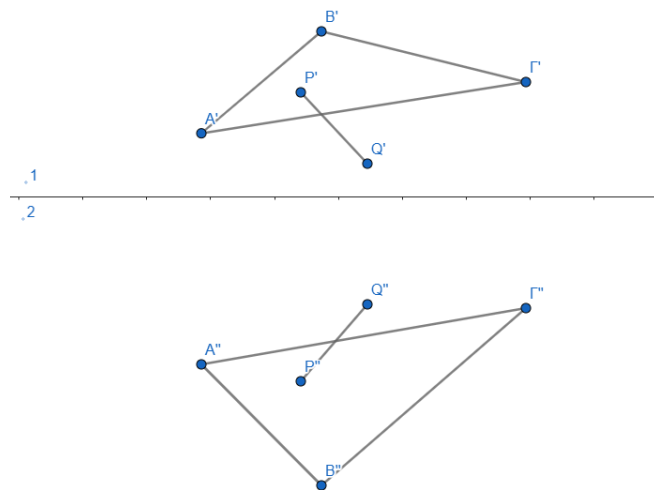


Η ένωση των σημείων  $X'$  με  $Y'$  και  $X''$  με  $Y''$  δίνει την ζητούμενη ευθεία στην πρώτη και δεύτερη προβολή.



**Πρόβλημα 2.** Να βρεθεί η πραγματική γωνία ανάμεσα σε τυχαία ευθεία και τυχαίο επίπεδο οριζόμενο από τρία σημεία. (Για να προσδιορίσουμε τη γωνία που σχηματίζει μια ευθεία με ένα επίπεδο, πρέπει να ορίσουμε βοηθητικό επίπεδο προβολής στο οποίο η ευθεία να προβάλλεται σε πραγματικό μέγεθος και ταυτόχρονα το επίπεδο να προβάλλεται κάθετα ως ίχνος.)

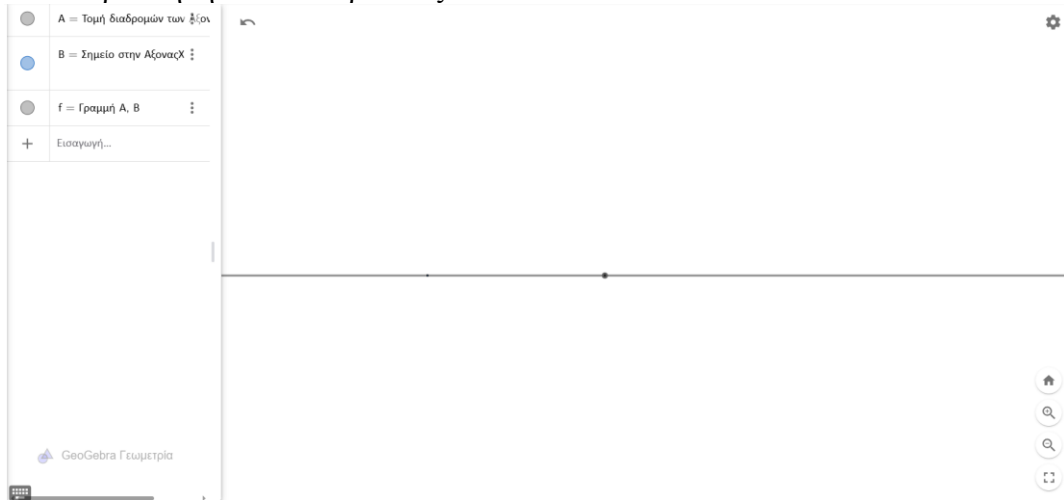
Κατασκευάζουμε αρχικά τις πρώτες και δεύτερες προβολές των σημείων A,B,Γ που ορίζουν το επίπεδο και τις προβολές της ευθείας ως ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα PQ. Το δεύτερο επίπεδο για πρακτικούς λόγους το έχουμε βάλει κάτω από το πρώτο επίπεδο.



## Μέρος Τέταρτο: Εφαρμογή

### 1. Ορισμός άξονα συμμετρίας

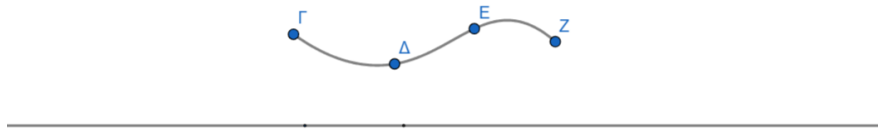
Φέρουμε ευθεία  $f$  παράλληλη στον κεντρικό άξονα  $XY$ .



### 2. Ορισμός άξονα συμμετρίας

Σχεδιάζουμε σε πρώτη προβολή μια καμπύλη προφίλ (μιας πλευράς της) η οποία στη συνέχεια θα αντικατοπτριστεί γύρω από τον άξονα συμμετρίας  $f$ . Για να σχεδιάσουμε την καμπύλη, θα δημιουργήσουμε τέσσερα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  και θα τα ενώσουμε στη συνέχεια με μια καμπύλη **Spline τεσσάρων σημείων** η οποία ορίζεται όπως παρακάτω:

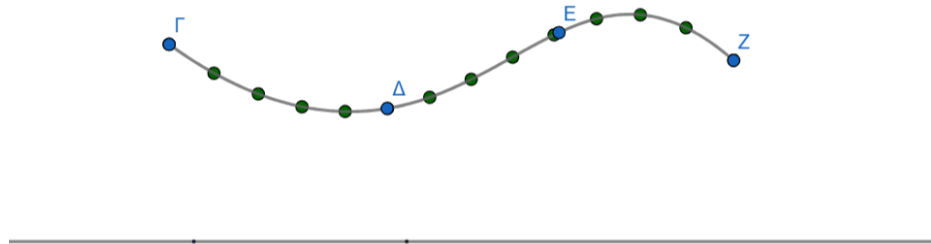
$$a = \text{ΚαμπύληSpline}(\{\Gamma, \Delta, E, Z\}, 4)$$



### 3. Ορισμός σημείων υποδιαίρεσης καμπύλης προφίλ (σημεία στήριξης τόξων)

Στη συνέχεια, θα τοποθετήσουμε πάνω στην καμπύλη προφίλ σημεία σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους. Τα σημεία αυτά θα αποτελέσουν τους οδηγούς για τις υποδιαίρεσεις του κανάβου. Για να τοποθετήσουμε σημεία σε ίσες αποστάσεις πάνω στην καμπύλη προφίλ, συμπεριλαμβανομένων των σημείων στην αρχή και στο τέλος της καμπύλης, ορίζουμε μια μεταβλητή  $N$  (ακέραιος αριθμός) για τον αριθμό των διαστημάτων ανάμεσα στα σημεία, με τη μορφή Slider (δρομέα) και στη συνέχεια, τοποθετούμε  $N + 1$  σημεία πάνω στην καμπύλη  $a$ , χρησιμοποιώντας την εντολή «Ακολουθία»:

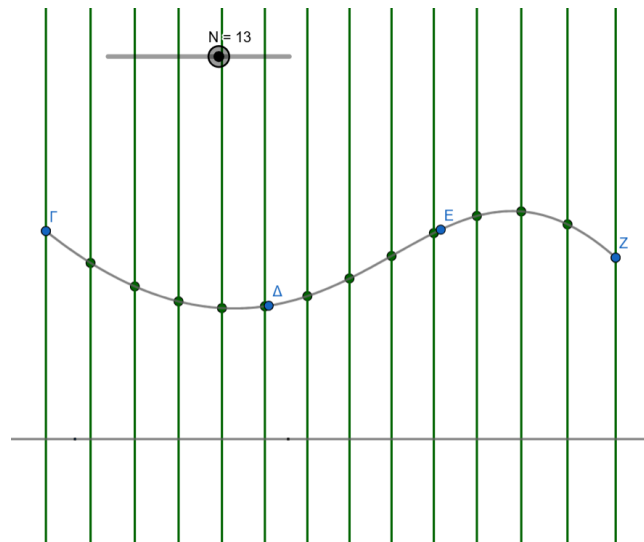
$$G1 = \text{Ακολουθία}(\text{Σημείο}(a, (n - 1) / N), n, 1, N + 1)$$



#### 4. Ορισμός κέντρων τόξων στον άξονα συμμετρίας

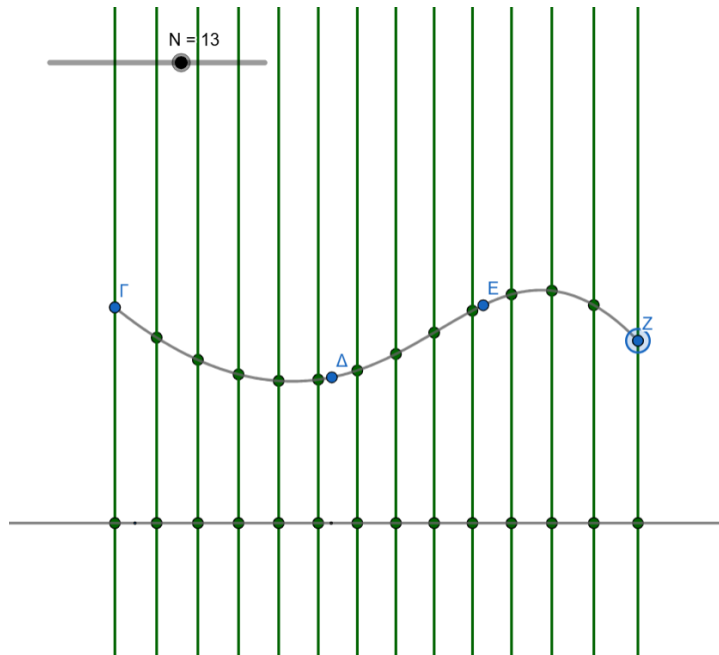
Στη συνέχεια, για κάθε τόξο, φέρνουμε βοηθητικό επίπεδο προβολής παράλληλο στο τόξο και κάθετο στο  $e1$  και προβάλλουμε σε αυτό, το κέντρο του τόξου ως αλληλοτομία με τον άξονα συμμετρίας του φορέα. Για το σκοπό αυτό, από κάθε σημείο υποδιαίρεσης της καμπυλής προφίλ φέρνουμε κάθετη ευθεία στον άξονα συμμετρίας και στη συνέχεια τέμνουμε την ευθεία αυτή με τον άξονα συμμετρίας. Για να φέρουμε τις κάθετες ευθείες στον άξονα συμμετρίας χρησιμοποιούμε την εντολή «Ακολουθία» επαναλαμβάνοντας την εντολή «Κάθετη» με inputs τη λίστα με τα σημεία υποδιαίρεσης  $G1$  και την ευθεία  $f$ .

$$G2 = \text{Ακολουθία}(\text{Κάθετη}(G1(k), f), k, 1, N + 1)$$



Για να τμήσουμε τις προκύπτουσες ευθείες με τον άξονα συμμετρίας χρησιμοποιούμε ξανά την εντολή «Ακολουθία» για να επαναλάβουμε την εντολή «Τομή» χρησιμοποιώντας ως inputs τη λίστα με τις ευθείες  $G2$  και τον άξονα συμμετρίας  $f$ . Τα  $N + 1$  σημεία προκύπτουν σαν λίστα με το όνομα  $G3$ .

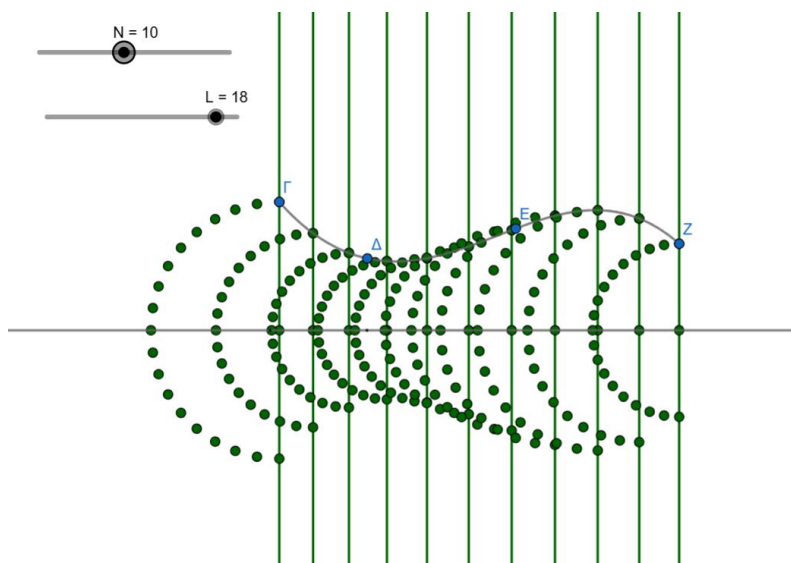
$$G3 = \text{Ακολουθία}(\text{Τομή}(G2(m), f), m, 1, N + 1)$$



### 5. Ορισμός σημείων υποδιαίρεσης τόξων σε βοηθητική προβολή

Ορίζουμε μια επιπλέον μεταβλητή  $L$  (ακέραιος αριθμός) για τον αριθμό των τμημάτων υποδιαίρεσης των τόξων, με τη μορφή Slider (δρομέα). Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την εντολή «Ακολουθία», για κάθε ένα από τα  $N + 1$  τόξα, επαναλαμβάνουμε την εντολή «Περιστροφή» του αντίστοιχου σημείου υποδιαίρεσης της καμπύλης προφίλ (άκρο του τόξου) γύρω από το κέντρο του τόξου,  $L + 1$  φορές και κάθε φορά με γωνία στροφής  $(j - 1) * 180 / L$  (όπου ο δείκτης  $j$  είναι ο αύξων αριθμός της επανάληψης με τιμές από 1 έως  $L + 1$ ). Για να ολοκληρώσουμε την παραπάνω διαδικασία για κάθε ένα από τα  $N + 1$  τόξα, θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε δύο φορές την εντολή «Ακολουθία», τη μία μέσα στην άλλη. Αρχικά, χρησιμοποιούμε την εντολή «Ακολουθία», για να μεταβούμε σε κάθε ένα από τα  $N + 1$  τόξα. Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε εκ νέου την εντολή «Ακολουθία», για να μεταβούμε σε κάθε ένα από τα  $L + 1$  σημεία υποδιαίρεσης του τόξου. Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστούμε έναν επιπλέον δείκτη  $w$  ο οποίος είναι ο αύξων αριθμός του τόξου με τιμές από 1 έως  $N + 1$ .

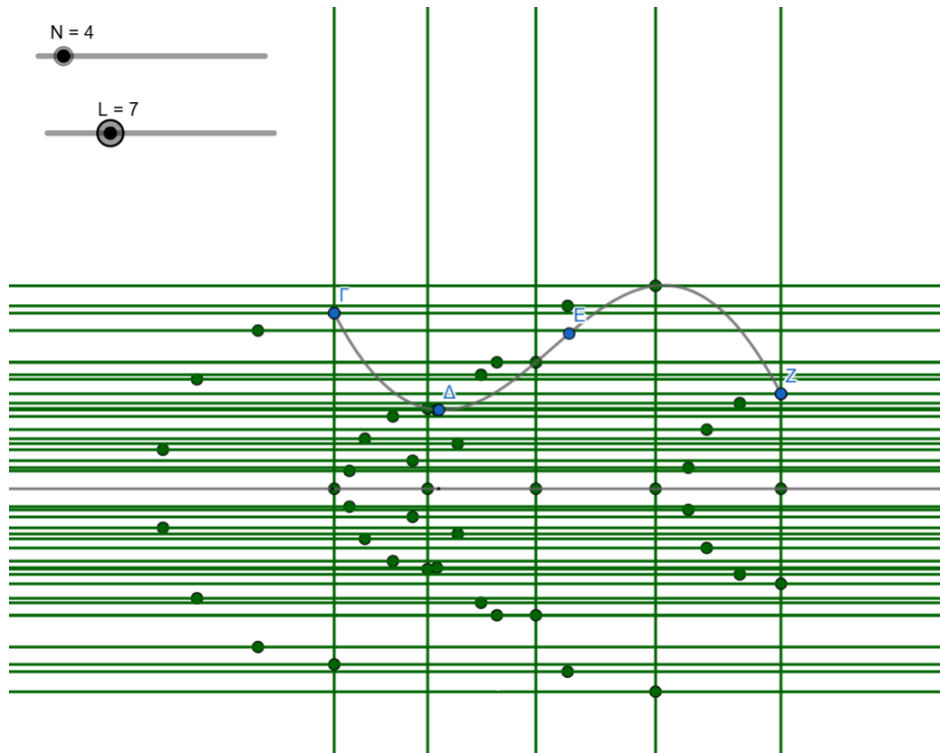
$$G4 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Στροφή}(G1(z), (j - 1)*180^\circ / L, G3(z)), j, 1, L + 1), z, 1, N + 1)$$



### 6. Πρώτη προβολή σημείων υποδιαίρεσης τόξων

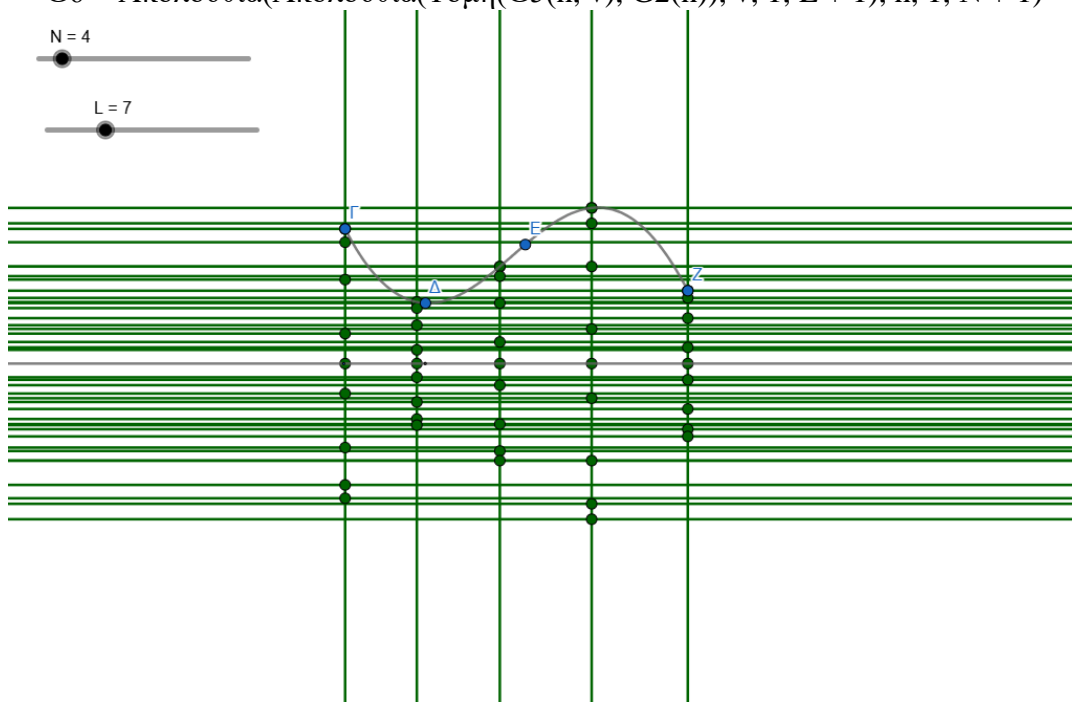
Στη συνέχεια τα προβάλλουμε στην πρώτη προβολή. Από την βοηθητική προβολή κάθε σημείου υποδιαίρεσης κάθε τόξου φέρουμε κάθετη στην πρώτη προβολή του τόξου (ή στην κάθετη ευθεία από το αντίστοιχο σημείο υποδιαίρεσης καμπύλης προφίλ προς τον άξονα συμμετρίας) και στη συνέχεια βρίσκουμε το σημείο τομής της με αυτή.

$$G5 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Κάθετη}(G4(i, r), G2(i)), r, 1, L + 1), i, 1, N + 1)$$



Ομοίως, για να βρούμε τα σημεία τομής κάθε ευθείας από την βοηθητική προβολή κάθε σημείου κάθε τόξου με την πρώτη προβολή του τόξου αυτού, χρησιμοποιούμε δύο φορές την εντολή «Ακολουθία», τη μία μέσα στην άλλη:

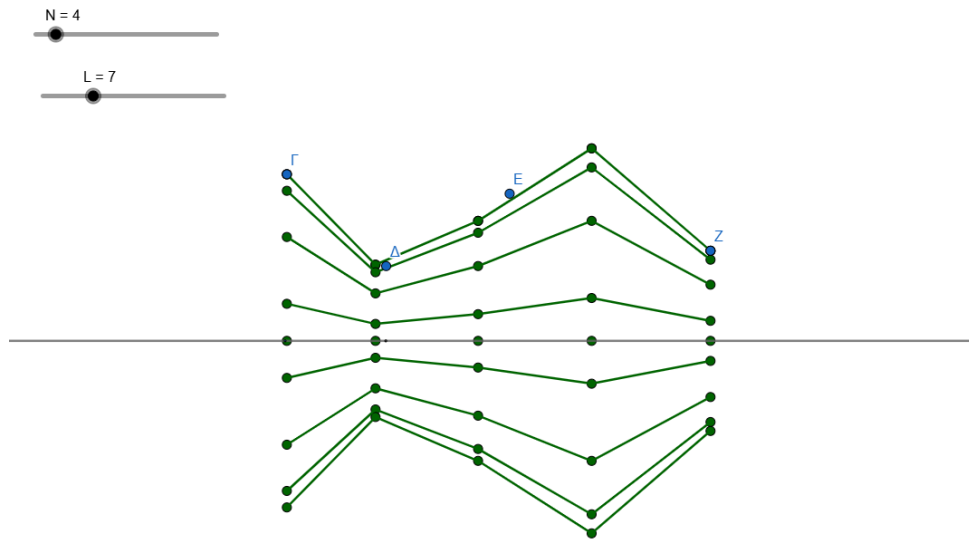
$$G6 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Τομή}(G5(h, v), G2(h)), v, 1, L + 1), h, 1, N + 1)$$



## 7. Ένωση σημείων κανάβου με ευθύγραμμα τμήματα

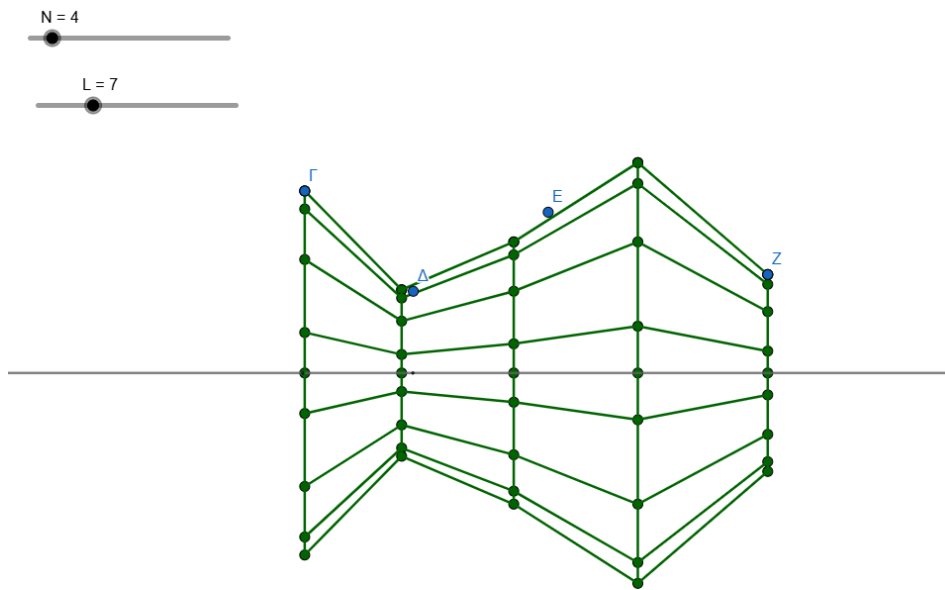
Στη συνέχεια ενώνουμε τα σημεία αυτά στις δύο διευθύνσεις τους (παράλληλα και εγκάρσια με τον άξονα συμμετρίας) με ευθύγραμμα τμήματα ώστε να υλοποιήσουμε τον ζητούμενο δομικό κανάβο του φορέα.

$$G7 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Τμήμα}(G6(\sigma, \varphi), G6(\sigma + 1, \varphi)), \sigma, 1, N), \varphi, 1, L + 1)$$



Στη συνέχεια θα ενώσουμε τα σημεία υποδιαίρεσης κάθε μεμονωμένου τόξου μεταξύ τους:

$$G8 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Τμήμα}(G6(\beta, \lambda), G6(\beta, \lambda + 1)), \lambda, 1, L), \beta, 1, N + 1)$$

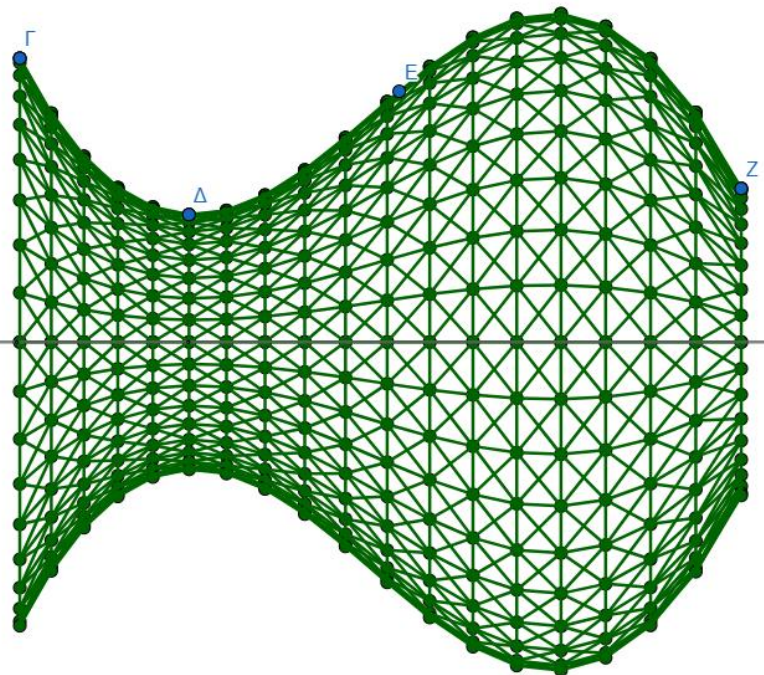
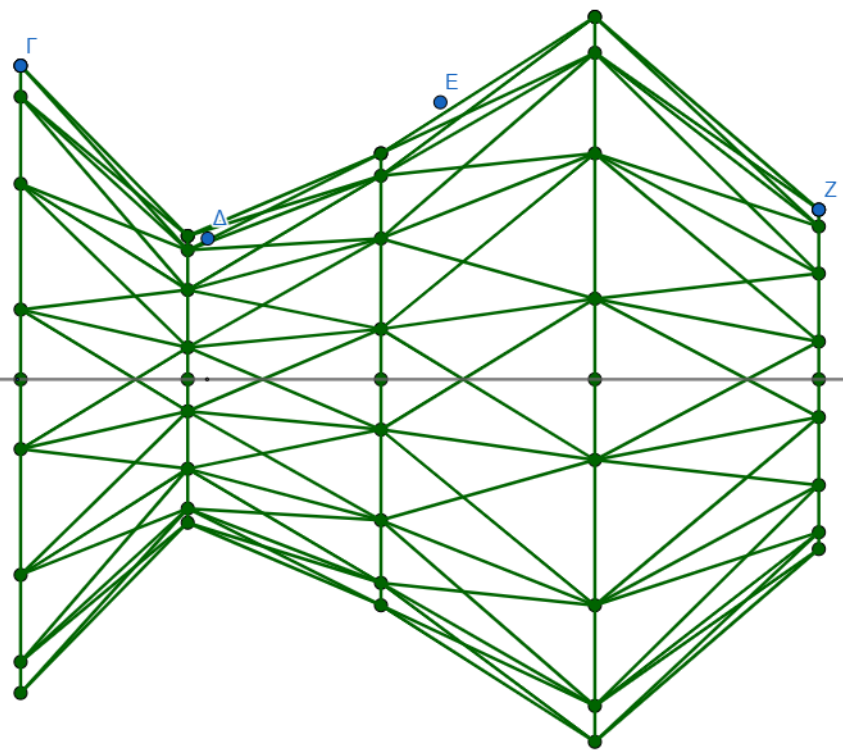
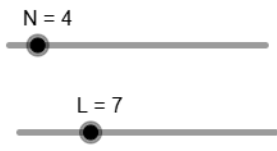


## 8. Παραμετρική τροποποίηση κανάβου οργανωτικού συστήματος

Έχοντας ορίσει τον κανάβο, μπορούμε πλέον να τον τροποποιήσουμε παραμετρικά, μεταβάλλοντας τις τιμές των μεταβλητών  $N$  και  $L$ , προσθέτοντας επιπλέον σημεία ελέγχου καμπύλης προφίλ στη λίστα  $G1$  και τροποποιώντας τις θέσεις τους. Ως τελικό βήμα, προσθέτουμε επιπλέον ευθύγραμμα ενώνοντας τα σημεία της λίστας  $G6$  διαγώνια μεταξύ τους με δύο ακόμα λίστες:

$$G9 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Τμήμα}(G6(\psi, k), G6(\psi + 1, k + 1)), k, 1, L), \psi, 1, N)$$

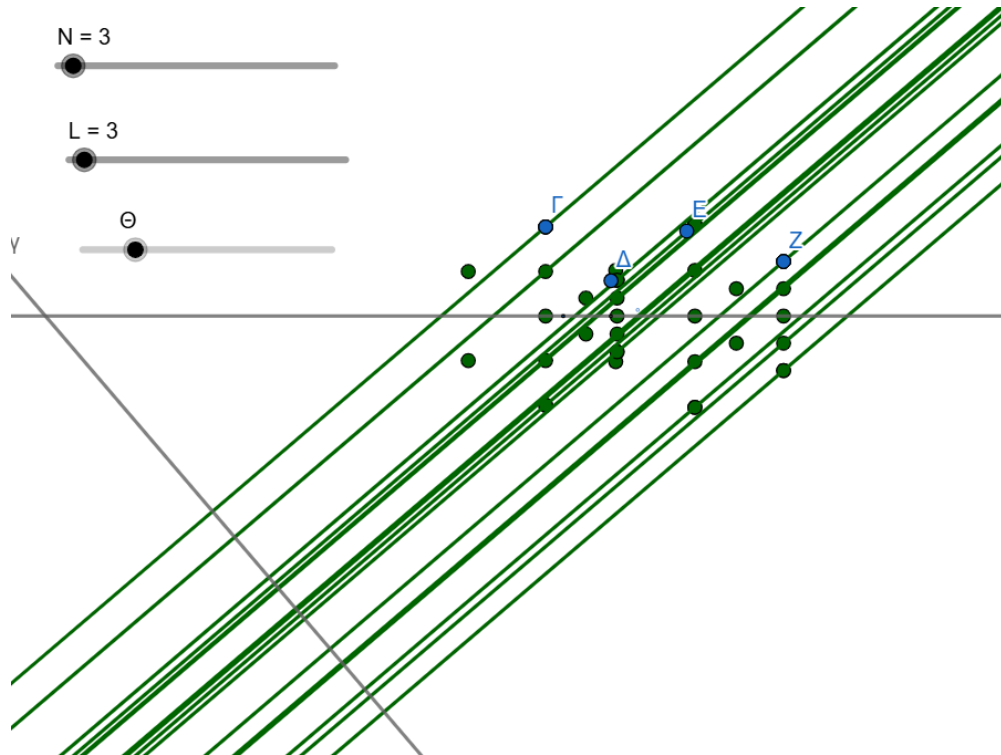
$$G10 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Τμήμα}(G6(\xi, \omega + 1), G6(\xi + 1, \omega)), \omega, 1, L), \xi, 1, N)$$



**9. Τρίτη (περιστρεφόμενη) προβολή**

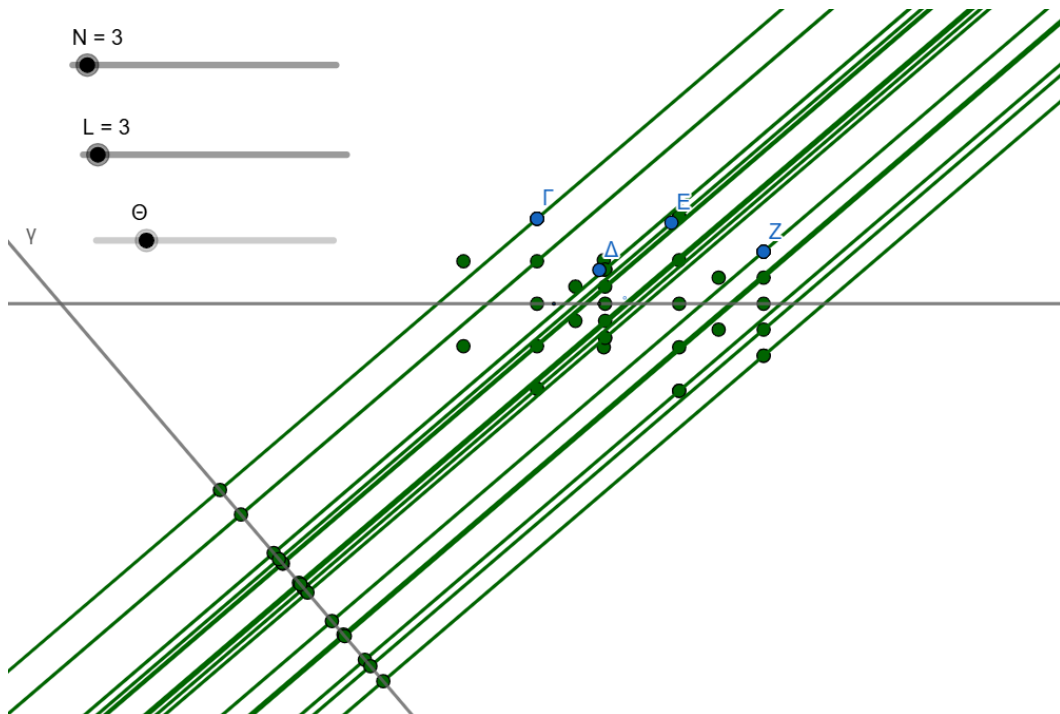
Φέρνουμε άξονα γ τυχαίας κατεύθυνσης όπου θα απεικονίσουμε την τρίτη προβολή. Στη συνέχεια με την επόμενη εντολή φέρνουμε ευθείες κάθετες στον άξονα γ οι οποίες διέρχονται από τα σημεία του βήματος 5.

$$G11 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Κάθετη}(G6(\tau, \varepsilon), \gamma), \varepsilon, 1, L + 1), \tau, 1, \text{Μήκος}(G6))$$



Με την επόμενη εντολή βρίσκουμε τα σημεία τομής αυτών των ευθειών με τον άξονα  $\gamma$ :

$$G12 = \text{Ακολουθία}(\text{Τομή}(G11(r, t), \gamma), t, 1, L + 1), r, 1, \text{Μήκος}(G11))$$



$$G13 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Απόσταση}(G4(\eta, O), G5(\eta)), O, 1, L + 1), \eta, 1, N + 1)$$

$$G14 = \text{Ακολουθία}(\text{Ακολουθία}(\text{Μεταφορά}(G12(\eta, O), \text{Περιστροφή}(\text{Διάνυσμα}(\gamma), 90^\circ)) * G13(\eta, O), O, 1, L + 1), \eta, 1, N + 1)$$