ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ | **ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ**
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ (ΕΚΠΑ)
ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟ ΠΡΟΦΙΛ: http://teacherfinder.gr/idiaitera-mathimata/nikos-aleksandris
E-mail: ediaitero@gmail.com
Τηλ. 6944393147

Προτεινόμενα Θέματα

1. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2, με $|z_2|=1$ ώστε να ισχύει:

$$|z_2 \sigma\upsilon\nu x + z_1 \eta\mu x| \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Α. Να δειχθεί ότι:

$$\mathrm{Re}(z_1 \overline{z_2})=0.$$

Β. Αν Β και Γ είναι οι εικόνες των z_1 και z_2 αντίστοιχα και Ο η αρχή των αξόνων να δείξετε ότι το τρίγωνο ΒΟΓ είναι ορθογώνιο.

Γ. Αν επιπλέον δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύουν:

$$g(x)\cdot g(-x)=1,\ \forall x\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \int_{-|z_1|}^{|z_1|} \frac{1}{1+|g(x)|}dx=1$$

τότε να βρείτε το $|z_1|$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να χρησιμοποιηθεί η ιδιότητα $|x|\leq 1 \Rightarrow |x|^2 \leq 1$ και στη συνέχεια να εφαρμόσετε το θεώρημα Fermat για κατάλληλη συνάρτηση.

Β. Αρκεί να αποδείξετε ότι $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2$, δηλαδή ότι ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα για το τρίγωνο ΒΟΓ.

Γ. Χρησιμοποιήστε τη μέθοδο αλλαγής μεταβλητής και αποδείξτε το ζητούμενο.

(Απ. Γ. $|z_1|=1$)

2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z και ο μιγαδικός w ώστε να ισχύει ότι:

$$w(1-z)=2+iz$$

Α. Να αποδείξετε ότι $z\neq 1$ και $w\neq -i$.

Β. Να αποδείξετε ότι $\frac{w-2}{w+i}=z$.

Γ. Αν οι εικόνες του z κινούνται σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ=1 και N(x,y) είναι οι εικόνες του w, να αποδείξετε ότι αυτά τα σημεία N(x,y) κινούνται στην ευθεία (ε) με εξίσωση: 4x+2y-3=0.

Δ. Να βρείτε τώρα εκείνο το μιγαδικό w που έχει το ελάχιστο μέτρο.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να χρησιμοποιήσετε την απαγωγή σε άτοπο (π.χ. Έστω ότι z=1 ….)

(Απ. Δ. $w_o=\frac{3}{5}+\frac{3}{10}i$)

3. Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z=x+yi, όπου x,y πραγματικοί αριθμοί και

$w=\frac{i(z+i)}{i-z}$ με $z\neq i$.

Α. Να αποδείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$w=\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}i$$

Β. Αν ο μιγαδικός w είναι πραγματικός αριθμός τότε η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ=1.

Γ. Αν ο μιγαδικός z είναι πραγματικός αριθμός τότε η εικόνα του w ανήκει στον κύκλο κέντρου Ο(0,0) και ακτίνας ρ΄=1.

4. Έστω η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(\kappa) = |z-6i|\kappa^3 - 3|z-8|\kappa + 2\text{, όπου } \kappa \in \mathbb{R} \text{ με } z = x + yi$$

η οποία παρουσιάζει ένα τοπικό ακρότατο στο σημείο $\kappa_o = 1$.

Να αποδείξετε ότι:

Α. Τα σημεία Λ(z) βρίσκονται πάνω στην ευθεία (ε): 4x-3y-7=0.

Β. $|z-8| \geq 5$ και $|z| \geq \frac{7}{5}$

Γ. Το ακρότατο αυτό στο σημείο κ_o=1, είναι ελάχιστο και μάλιστα η τιμή του είναι μικρότερη η ίση του -8.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να εφαρμόσετε το θεώρημα Fermat για τη συνάρτηση $f(\kappa)$.

Β. Χρησιμοποιήστε τον τύπο απόστασης σημείου από ευθεία:

$$d(M_o, \varepsilon) = \frac{|\mathrm{A}x_o + \mathrm{B}y_o + \Gamma|}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2}}$$

Γ. Μελετήστε την μονοτονία της $f(\kappa)$.

(Απ. Γ. Τ.Μ. στο κ_o=-1 και Τ.Ε. στο κ_o=1, $f(1) \leq -8$)

5. Για δύο συναρτήσεις f και g ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$f(x)\cdot f^{'}(x)+g^{'}(x)\cdot g^{''}(x)=x \text{ για κάθε } x\in[2,+\infty)$$

Επιπλέον ισχύουν: $f(2)=1$, $g^{'}(2)=\sqrt{3}$ και $|f(x)|\neq x$ για κάθε $x\geq 2$.

Α. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in[2,+\infty)$.

Β. Αν $f^{'}(x)\cdot f(x)=\dfrac{x}{2}$, $x\geq 2$ τότε να βρείτε τον τύπο και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης f.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Για να δείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε την απαγωγή σε άτοπο σε συνδυασμό με τη δεδομένη σχέση $|f(x)|\neq x$.

(Απ. Β. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{x^2-2}$, Δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτες, Η ευθεία $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$)

6. Έστω ότι για τη συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$(\ln x)^2 f(x) = xf^{'}(x)\ln^2 x + x \text{, για κάθε } 0 < x \neq 1$$

όπου η f είναι συνεχής στο $(0,1)\cup(1,+\infty)$ και $f(e)=e$, $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ για κάθε $x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ. Να αποδείξετε ότι $xf(x) \leq \int_x^{2x} f(t)dt \leq xf(2x)$, $x \geq e$

Ε. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_x^{2x} \dfrac{t}{\ln t}dt = +\infty$.

(Απ. Β. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(e)=e$.)

Γ. Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(-\infty,0)\cup[e,+\infty)$.

Δ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται με τη βοήθεια της μονοτονίας του ολοκληρώματος σύμφωνα με τη οποία:

Για συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] ισχύει ότι αν για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $f(x) \leq g(x)$, τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

Ε. Το ζητούμενο αποδεικνύεται με τη βοήθεια του Δ. ερωτήματος και τη χρήση του κριτηρίου παρεμβολής (Προσοχή το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και για τα όρια ίσα με $+\infty$).

7. Α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $e^x - x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Πότε ισχύει η ισότητα $e^x - x = 1$;

Β. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$. Για κάθε $x \geq 0$ θεωρούμε το μιγαδικό z, με:

$$z = \int_0^x e^{f(t)}dt + ix\int_0^1 e^{f(x-xt)}dt$$

και

$$\frac{|z|}{\sqrt{2}} = \int_0^x [f(t) + e^t]dt + f(\alpha) - 1,\ \alpha > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

1) $\dfrac{z}{1+i} = \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$.

2) $e^{f(x)} = f(x) + e^x$, για κάθε $x \geq 0$.

3) Η f είναι γνησίως αύξουσα.

4) Η f έχει αντίστροφη και να βρείτε την αντίστροφή της.

5) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0,\alpha)$, τέτοιο, ώστε $\alpha f'(\xi) = 1$.

<u>Υπόδειξη:</u> 4) Η f ως γνησίως αύξουσα είναι 1-1 και άρα έχει αντίστροφη. Αρχικά βρείτε το σύνολο τιμών της f και άρα πεδίο ορισμού της αντίστροφης ($[0,+\infty)$) και κατόπιν τον τύπο της ($f^{-1}(x) = \ln(e^x - x)$).

5) Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης (Rolle-Θ.Μ.Τ.).

8. Έστω η συνάρτηση f ώστε $f(x)-2f^{'}(x)+f^{''}(x)=e^{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Επιπλέον θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f^{'}(x)-f(x)$ με $g(0)=1$ και τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{g(x)}{e^{x}}-x$.

Να αποδείξετε τα παρακάτω:

Α. $h(x)=1$

Β. $g(x)=(x+1)e^{x}$

Γ. $f(x)=\dfrac{1}{2}e^{x}x^{2}+xe^{x}+e^{x}$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αρχικά αποδείξτε ότι: $h^{'}(x)=0\Rightarrow h(x)=c$ και κατόπιν δείξτε ότι η σταθερά c είναι ίση με 1.

Β. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα από το Α. ερώτημα.

Γ. Το ζητούμενο προκύπτει με τη βοήθεια του Β. ερωτήματος με κατάλληλο μετασχηματισμό.

9. Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x)+f(\sigma\upsilon\nu x)=1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι:

1) $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{1}{2}$ και $f(0)+f(1)=1$

2) Υπάρχει $\xi\in[0,1]$ τέτοιο ώστε: $f(\xi)+\xi=1$.

Β. Έστω επιπλέον ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και $f(x)\geq\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

1) Να βρείτε την $f^{'}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. 2) Χρησιμοποιήστε κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης.

Β. 1) <u>α. Μέθοδος:</u> Θεωρείστε κατάλληλη συνάρτηση και αποδείξτε το ζητούμενο με τη χρήση του θεωρήματος Fermat.

<u>β. Μέθοδος:</u> Χρησιμοποιήστε τον ορισμό της παραγώγου και το κριτήριο παρεμβολής για να αποδείξετε το ζητούμενο.

Β. 2) Χρησιμοποιήστε τον κανόνα de L'Hospital για να αποδείξετε το ζητούμενο.

(Απ. Β. 1) $f'(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}x-\frac{1}{2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(\sigma\upsilon\nu x)}{\eta\mu x}=f^{'}(0)=0$)

10. Έστω η ορισμένη στο $[\alpha,\beta]$ συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει: $f(\alpha)=f(\beta)=0$, $0<\alpha<1<\beta$, $f(1)=1$, $f'(1)=0$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μοναδική πραγματική ρίζα το 1.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f στο σημείο 1 παρουσιάζει μέγιστο.

Γ. Να βρείτε το σύνολο (πεδίο) τιμών της f.

Δ. Αν ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} xf'(\alpha+\beta-x)dx=\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$, τότε να βρείτε το εμβαδόν Ε του χωρίου που ορίζεται από τη C_f τον x΄x και τις ευθείες x=α και x=β.

Ε. Έστω τώρα και η συνάρτηση $g(x)=\int_{1}^{f(x)}\frac{1}{u}du$ με $x\in(\alpha,\beta)$, Να αποδείξετε ότι $g(x)\le 0$ και ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Χρησιμοποιήστε κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης και τη μονοτονία της f' για να αποδείξετε το ζητούμενο.

Β. Από την μονοτονία της f' για x<1 και x>1 προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

Ε. Αποδείξτε ότι $g(x)\le 0$ από τη μονοτονία της g και ότι η g στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω δείχνοντας ότι $g''(x)<0$.

(Απ. Γ. [0,1], Δ. Ε=0.5 τ.μ.)

11. Αν η εξίσωση $z^2+\alpha z+\beta=0$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με άγνωστο $z\in\mathbb{C}$ έχει ρίζα το μιγαδικό αριθμό $z_1=2i$, να βρείτε:

Α. Την άλλη ρίζα z_2 της εξίσωσης και τις τιμές των α,β.

Β. Την τιμή του θετικού ακέραιου αριθμού ν ώστε:

$$z_1^{\nu}+z_2^{\nu}=-2048.$$

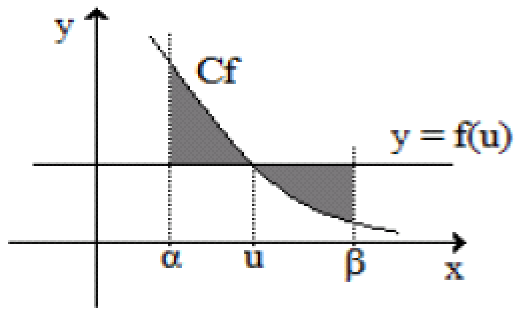
Γ. Το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει:

$$|w-2+iz_1|^2+|w+2i-z_2|^2=18$$

Δ. Τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=|w-\bar{w}|$, όπου w ο μιγαδικός αριθμός που ικανοποιεί τη σχέση του ερωτήματος Γ.

(Απ. Α. $\alpha=0,\beta=4$, $z_2=-2i$, Β. ν=10, Γ. Ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος κέντρου Κ(2,-2) και ακτίνας ρ=1, Δ. $\mathrm{A}_{\min}=2$, $\mathrm{A}_{\max}=6$)

12. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(x)<0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να βρείτε το σημείο $\mathrm{M}(u,f(u))$ με $u\in(\alpha,\beta)$ ώστε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της C_f και των ευθειών $y=f(u)$, $x=\alpha$ και $x=\beta$ να γίνεται ελάχιστο.



Υπόδειξη: Δεδομένου ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα θα είναι και 1-1. Άρα ισχύει ότι: $f(x)=f(u)\Leftrightarrow x=u$.

Στη συνέχεια υπολογίστε το εμβαδόν με βάση τον τύπο:

$$E(u)=\int_{\alpha}^{\beta}\left|f(x)-f(u)\right|dx.$$

(Απ. $\mathrm{M}(\frac{\alpha+\beta}{2},f(\frac{\alpha+\beta}{2}))$)

13. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt[3]{1-x^5}$.

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1}.

Β. $\int_0^1(\sqrt[3]{1-x^5}-\sqrt[5]{1-x^3})dx=0$

Γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον ζεύγος παράλληλων εφαπτόμενων των C_f, C_f^{-1} που εφάπτονται σε αυτές σε σημεία με κοινή τετμημένη $x_o\in(0,1)$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αρκεί να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα που σημαίνει ότι είναι 1-1 με αποτέλεσμα να έχει αντίστροφη. Κατόπιν βρείτε τον τύπο της αντίστροφης ($f^{-1}(x)=\sqrt[5]{1-x^3}$, με $x\in[0,1]$).

Β. Είναι $\int_0^1(\sqrt[3]{1-x^5}-\sqrt[5]{1-x^3})dx=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f^{-1}(x)dx$

Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με την αντικατάσταση:

$u=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(u)$.

Γ. Θεωρείστε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-f^{-1}(x)$ και εξετάστε τις προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [0,1].

14. Έστω η συνεχής συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x>0$ να ισχύει:

$$x^2\ln x+\frac{2}{x^3}\int_x^{x^2} t^2 f(\frac{t}{x})dt = x^2-1$$

Α. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\dfrac{1-2\ln x}{2x}$

Β. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και το πρόσημό της.

Γ. Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{3}{2}}(2\ln x-1)\le 2x$ για κάθε $x>0$.

Δ. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.

Ε. Να βρείτε τις τιμές των ορίων $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

Ζ. Να βρείτε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f, την ευθεία x=1 και τον άξονα x΄x.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αποδείξτε το ζητούμενο με κατάλληλη αντικατάσταση ($u=\dfrac{t}{x}$).

Γ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα από τη μονοτονία της f.

(Απ. Β. Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $e^{\frac{3}{2}}$, το $f(e^{\frac{3}{2}})=-e^{-\frac{3}{2}}$, Δ. Σημείο καμπής το $\Lambda(e^2,-\dfrac{3}{2e^2})$, $y=\dfrac{1}{2e^4}x-\dfrac{4}{2e^2}$, Ε. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη,

Ζ. $E=\int_1^{\sqrt{e}} f(x)dx=\dfrac{1}{8}$ τ.μ.)

15. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$F(x)=\int_0^{2x-1}\frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}dt\ .$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F και να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και να προσδιορίσετε το πρόσημο της F.

Β. Να αποδείξετε ότι:

$$F^{'}(\eta\mu x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\ \text{και}\ F(\eta\mu x)=x-\frac{\pi}{6},\ \text{για κάθε}\ x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\ .$$

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I=\int_0^{\sqrt{3}-1}\frac{1}{\sqrt{4-(t+1)^2}}dt$$

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου μεταξύ της γραφικής παράστασης της F, του x΄x και των $x=0$ και $x=\frac{1}{2}$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Πρέπει $4-(t+1)^2>0$, $t=2x-1$, Από την μονοτονία της F μπορείτε εύκολα να προσδιορίσετε το πρόσημό της, Δ. Δεδομένου ότι για $x\in[0,\frac{1}{2}]$ είναι $F(x)\le 0$, είναι $\mathrm{E}=-\int_0^{\frac{1}{2}}F(x)dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}x^{'}F(x)dx=....$.

(Απ. Α. $x\in(-1,1)$, $F(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,\frac{1}{2})$, $F(x)>0$ για κάθε $x\in(\frac{1}{2},1)$,

Γ. $I=\frac{\pi}{6}$, Δ. $\mathrm{E}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$)

16. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$, με αρχική συνάρτηση (παράγουσα) $F(x)$, με $F(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έστω επίσης ότι ισχύει η σχέση:

$$f(x)\cdot\frac{1}{F(x)}=x\sigma\upsilon\nu x \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Επιπλέον ισχύει ότι $F(0)=e$.

Α. Υπολογίστε το $\int x\sigma\upsilon\nu x dx$.

Β. Υπολογίστε την $f(x)$.

Γ. Υπολογίστε το εμβαδόν το χωρίου μεταξύ των: f, του x΄x και των ευθειών x=0, x=π.

<u>Υπόδειξη:</u> Η $F(x)$ είναι παράγουσα της f και άρα ισχύει ότι: $F^{'}(x)=f(x)$.

(Απ. Α. $\int x\sigma\upsilon\nu x dx = x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x+c$, Β. $f(x)=x\sigma\upsilon\nu x e^{x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$,

Γ. $\mathrm{E}=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=2e^{\frac{\pi}{2}}-e-e^{-1}$)

17. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ. Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι:

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}) \quad \text{(Ανισότητα Jensen)}$$

<u>Υπόδειξη:</u> Αρχικά εξετάστε τι συμβαίνει για $x_1=x_2$.

Στη συνέχεια διακρίνετε τις περιπτώσεις: $x_1>x_2$ και $x_1<x_2$.

Για να αποδείξετε το ζητούμενο, εφαρμόστε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ) στα διαστήματα $\left[x_1, \frac{x_1+x_2}{2}\right]$ και $\left[\frac{x_1+x_2}{2}, x_2\right]$. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η f είναι κυρτή ($f''(x)>0$) στο διάστημα Δ, που σημαίνει ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ.

18. Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = f(x) + xi$, όπου $f(x) = \int_0^x \frac{2}{e^t + \alpha} dt$, $\alpha > 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η f^{-1}.

Β. Να αποδείξετε ότι η εικόνα του z ανήκει στη γραφική παράσταση της f^{-1}.

Γ. Αν ισχύει ότι $|\overline{z} + i| \le |z - 1|$, να αποδείξετε ότι:

1) $\mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Im}(z)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2) $\alpha = 1$

3) $\frac{2}{e^2 + 1} < \int_0^2 \frac{2}{e^t + 1} dt - \int_0^1 \frac{2}{e^t + 1} dt < \frac{2}{e + 1}$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αρκεί να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και άρα 1-1, με αποτέλεσμα να υπάρχει η f^{-1}.

Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα δεδομένου ότι ισχύει: $f^{-1}(f(x)) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. 1) Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα μετά από πράξεις με τα μέτρα των μιγαδικών.

2) Με τη βοήθεια του ερωτήματος Γ. και τη χρήση του θεωρήματος Fermat για κατάλληλη συνάρτηση αποδεικνύεται το ζητούμενο.

3) Εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ σε κατάλληλο διάστημα για τη συνάρτηση f.

19. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με $g'(x) = f'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = g(0) + \alpha$ όπου:

$$\alpha = \lim_{x \to +\infty}\left[x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{x+1}{x^3+x^2+1}\right)\right].$$

Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ με $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της $g(x) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_o) = \left(\frac{f'(x_o)}{f(x_o)}\right)^2$.

<u>Υπόδειξη:</u> Με κατάλληλο μετασχηματισμό ή και με χρήση κανόνα de L'Hospital, από τον υπολογισμό του ορίου προκύπτει ότι: $\alpha = 1$.

Βρείτε τη σχέση που συνδέει τις δύο συναρτήσεις: $g(x) = f(x) - 1$.

Παρατηρήστε μετά από πράξεις ότι: $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 1$, που σημαίνει ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στα σημεία ρ_1, ρ_2 και άρα σύμφωνα με το θεώρημα Fermat ισχύει ότι: $f'(\rho_1) = f'(\rho_2) = 0$.

Εφαρμόστε το θεώρημα Rolle για κατάλληλη συνάρτηση στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ για να αποδείξετε το ζητούμενο.

<u>Προσοχή:</u> Δίνεται η κατάλληλη συνάρτηση!!! → $H(x) = f'(x)e^{\frac{1}{f(x)}}$.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to R$, η οποία είναι κυρτή με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(1)=1$, $f'(1)=0$. Επίσης δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\int_1^x f(t)dt}{x-1} \ , \ x>1 \\ 1 \ , \ x=1 \end{cases}.$$

Α. Να εξετάσετε τη συνέχεια της $g(x)$.

Β. Να βρείτε την $g^{'}(x)$.

Γ. Να εξετάσετε την μονοτονία της $g(x)$.

Δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\dfrac{\int_1^{\alpha} f(t)dt}{\int_1^{\beta} f(t)dt}<\dfrac{\alpha-1}{\beta-1}$, για κάθε $\alpha,\beta\in R$ με $1<\alpha<\beta$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Εξετάστε τη συνέχεια της $g(x)$ για x>1 καθώς και για $x_o=1$.

Β. Βρείτε την $g^{'}(x)$ για x>1 καθώς και για $x_o=1$ (με χρήση του ορισμού της παραγωγισιμότητας σε σημείο).

Γ. Για να βρείτε την μονοτονία της $g(x)$ είναι απαραίτητο να θέσετε νέα συνάρτηση έστω Η(x) ίση με τον αριθμητή της $g^{'}(x)$, την οποία και να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, χρησιμοποιώντας ως δεδομένο το ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή ($f^{''}(x)>0$).

Δ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα από την μονοτονία της $g(x)$.

(Απ. Β. $g'(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)(x-1)-\int_1^x f(t)dt}{(x-1)^2} \ , \ x>1 \\ 0 \ , \ x=1 \end{cases}$, Γ. Η $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$)

21. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: $\Re \to \Re$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2x}{x-3}=1 \quad \text{και} \quad f(5)=6.$$

Α. Να αποδείξετε ότι f(3)=6.

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της P(3,f(3)).

Γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία y=x+2 τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_o \in (3,5)$.

Δ. Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (3,5)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Υπόδειξη: Α. Η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής στο $x_o=3$, Γ. Να θεωρήσετε κατάλληλη συνάρτηση (h(x)=f(x)-x-2, ορισμένη στο $\Re$) και να χρησιμοποιήσετε το κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης για να αποδείξετε το ζητούμενο,

Δ. Με κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης αποδεικνύεται εύκολα ότι η f΄(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (3,5) και επιπλέον από τη μονοτονία της f΄(x) (f΄΄(x)<0) αποδεικνύεται ότι η ρίζα αυτή είναι και μοναδική.

(Απ. Β. y=3x-3)

22. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f : $\Re \to \Re^*$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Re$, τέτοια ώστε να ισχύει:

$$2f'(x) - f^2(x)\eta\mu x = 0 \text{ για κάθε } x \in \Re \text{ και } f(0)=\frac{1}{2}.$$

Α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι η $f(x)=\dfrac{2}{3+\sigma\upsilon\nu x}$, για κάθε $x \in \Re$.

Β. Να δείξετε ότι $\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \Re$.

Γ. Έστω g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\Re$ για την οποία ισχύει:

$$g'(x) = f(x) \cdot e^{-g(x)}, \text{ για κάθε } x \in \Re, \text{ τότε:}$$

1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = e^{g(x)}$ είναι κοίλη στο (π, 2π).

2) Να δείξετε ότι: $1 \leq e^{g(x+1)} - e^{g(x-1)} \leq 2$, για κάθε $x \in \Re$.

3) Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{g(x)}-2x+2012=0$, έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αποδείξτε το ζητούμενο με κατάλληλο μετασχηματισμό της σχέσης: $2f'(x) - f^2(x)\eta\mu x = 0$, Β. Αποδείξτε το ζητούμενο ξεκινώντας από τη δοσμένη σχέση $\dfrac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$, χρησιμοποιώντας ισοδυναμίες μέχρι να καταλήξετε σε κάτι που ισχύει,

Γ. 1) Αρκεί να δειχτεί ότι $h''(x) < 0$ στο (π, 2π), 2) Να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $h(x)$ στο [x-1, x+1] και με τη βοήθεια του ερωτήματος Β. να αποδείξετε το ζητούμενο, 3) Να εξετάσετε τη συνάρτηση $\Phi(x)= e^{g(x)}-2x+2012$ ως προς τη μονοτονία. (Οποιαδήποτε γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της).

23. Έστω μια συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύει $xf'(x)-2x^2=1$ για κάθε $x>0$ και $f(e)=e^2$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της f.

Β. Να δείξετε ότι f είναι 1-1 και να βρεθούν οι ρίζες και το πρόσημο της f.

Γ. Να λυθεί η εξίσωση :

$$e^{2x}+2e^x+\ln\frac{e^x+1}{2}=3$$

Δ. Δίνεται η συνάρτηση:

$$h(x)=x-\frac{\ln x}{x}.$$

Να μελετηθεί η h(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Ε. Αν για τον μιγαδικό z ισχύει:

$$\left|e^2\cdot z-f(e)i\right|+\left|e^2\cdot\bar{z}+f(e)i\right|=4e^2,$$

τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Αρκεί να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη και άρα 1-1, Γ. Να χρησιμοποιήσετε το γεγονός ότι η f είναι 1-1 και με κατάλληλο μετασχηματισμό να αποδείξετε το ζητούμενο.

(Απ. Α. $f(x)=x^2+\ln x-1,\ \ x>0$, Β. Προφανής ρίζα η x_o=1 που είναι και μοναδική λόγω μονοτονίας, $x>1\Leftrightarrow f(x)>0$ και $0<x<1\Leftrightarrow f(x)<0$,

Γ. x=0, Δ. $h\uparrow$ στο $[1,+\infty)$, άρα $h\downarrow$ στο $(0,1]$, Τ.Ε. h(1)=1,

Ε. Κύκλος με κέντρο Κ(0,1) και ακτίνα ρ=2)

24. Για μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$e^{-x} f^{'}(x) = x^2 - 1,\ \text{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}\ \text{και}\ f(0) = -3.$$

Α. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x) = e^x (x-1)^2 - 4$$

Β. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$.

Γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα.

Δ. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$\Phi(x) = \frac{f(x) + f''(x) + 4}{2x^2} \quad \text{και} \quad h(x) = -\frac{1}{x},\ \text{με}\ x \neq 0$$

έχουν μία μόνο κοινή εφαπτομένη.

Υπόδειξη: Γ. Αρχικά να μελετήσετε την μονοτονία της f και κατόπιν από το σύνολο τιμών για κάθε διάστημα μονοτονίας να αποδείξετε το ζητούμενο, Δ. Βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων των συναρτήσεων Φ(x) και h(x) σε δύο τυχαία σημεία (έστω $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$, αντίστοιχα). Κατόπιν προσπαθήστε να αποδείξετε ότι το σύστημα των δύο εξισώσεων που προκύπτει με δεδομένο ότι θέλουμε οι δύο εφαπτομένες να συμπίπτουν, έχει ακριβώς μία λύση με τη βοήθεια του ερωτήματος Γ.

(Απ. Β. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$, άρα η ευθεία $y = -4$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $-\infty$, Γ. Για $x \in (1, +\infty)$ το σύνολο τιμών της f είναι $(-4, +\infty)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (1, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$ και από τη μονοτονία η ρίζα αυτή είναι και μοναδική)

25. Οι μιγαδικοί z, w συνδέονται με την παρακάτω σχέση:

$$w = \frac{iz-4}{z-4}, \text{ με } z = x + yi \neq 4.$$

Α. Να γράψετε τον μιγαδικό w με τη μορφή $\kappa + \lambda i$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Β. Αν ισχύει $\frac{1}{4}\mathrm{Re}(w) + \mathrm{Im}(w) = 1$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία κινούνται οι εικόνες του μιγαδικού z.

Γ. Αν ο z κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4, να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του w.

Δ. Αν ο w κινείται σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1, να αποδείξετε ότι:

$$z^{2010} + (\overline{z})^{2010} = 0$$

(Απ. Α. $w = \frac{4(-x+y+4)}{(x-4)^2+y^2} + \frac{x^2+y^2-4x+4y}{(x-4)^2+y^2}i$, Β. $3x+5y=12$ εκτός του σημείου (4,0), Γ. $y = x$ εκτός του σημείου (4,4))

26. Α. Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}} \quad \text{και} \quad g(x) = x^{1+\frac{1}{x}}$$

Β. Να δείξετε ότι $x^e \le e^x$ για κάθε $x > 0$.

Γ. Να δείξετε ότι για $\alpha > e$ και $\beta > 0$ ισχύει:

$$1 < \frac{\alpha^{\frac{1}{\alpha}}}{(\alpha+\beta)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}} < 1 + \frac{\beta}{\alpha}$$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Ισχύει ότι: $\ln x \le x - 1 < x + 1$, για κάθε $x > 0$ (Σημείωση: Αν μια συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ($f(x) = \ln x$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$) σε ένα διάστημα Δ ($x > 0$) τότε η εφαπτομένη της (C_f) σε κάθε σημείο της (π.χ. $y = x - 1$) βρίσκεται πάνω από τη (C_f), Β. Από τη μονοτονία της $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ αποδεικνύεται εύκολα το ζητούμενο, Γ. Από τη μονοτονία των f, g αποδεικνύεται εύκολα το ζητούμενο για $e < \alpha < \alpha + \beta$.

(Απ. Α. $f \uparrow$ στο $(0, e]$, $f \downarrow$ στο $[e, +\infty)$, Τ.Μ. (Ολικό) το $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$, $g \uparrow$ στο $(0, +\infty)$)

27. Έστω η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

$$f''(x) + f(x) = 0$$

Δείξτε ότι:

Α. $[f'(x)]^2 + f^2(x) = c$, με $c, x \in \mathbb{R}$.

Β. $f(x) = f'(0)\eta\mu x + f(0)\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να θεωρήσετε τη συνάρτηση $G(x) = [f'(x)]^2 + f^2(x)$ και να δείξετε ότι: $G'(x) = 0$,

Β. Να θεωρήσετε τη συνάρτηση $H(x) = f(x) - f'(0)\eta\mu x - f(0)\sigma\upsilon\nu x$ και να αποδείξετε το ζητούμενο με τη βοήθεια του Α. ερωτήματος,

Γ. Να θεωρήσετε τη συνάρτηση $\Phi(x) = \eta\mu(x+\beta)$ και να αποδείξετε το ζητούμενο με τη βοήθεια του Β. ερωτήματος.

28. Α. Δίνεται η συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ και η συνάρτηση:

$$F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Αν η γραφική παράσταση C της F τέμνει τον άξονα x΄x στο x_o, δείξτε ότι η εφαπτομένη της C στο x_o, σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

Β. Δείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης:

$$g(x) = \frac{\eta\mu x - 2x}{\sigma\upsilon\nu x - 2}$$

σε κάθε σημείο τομής της C με τον x΄x, σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια του ερωτήματος Α.

29. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x),\ x\in[0,+\infty) \text{ και } g(x),\ x\in[0,+\infty),$$

τέτοιες ώστε:

I) $f(0)=g(0)$

II) $f'(0)=g'(0)$

III) Οι f', g' είναι συνεχείς στο $x_o=0$

IV) $f''(x)>g''(x)$ για κάθε $x>0$

Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$, ισχύει: $f(x)>g(x)$.

<u>Υπόδειξη:</u> Να θεωρήσετε κατάλληλη συνάρτηση ($H(x)=f(x)-g(x)$) την οποία και να μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

30. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $[f'(x)-f(x)](x^2+1)=2xf(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ της οποίας η C_f έχει στο Α(0, $f(0)$) εφαπτομένη κάθετη στην ευθεία ε: $y=-x+3$.

Α. Να δείξετε ότι $f(x)=(x^2+1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να δείξετε ότι η (ε) και η C_f δεν μπορεί να έχουν δύο κοινά σημεία.

Γ. Έστω $g(t)=\int_0^t f(x)dx$, $t\geq 0$. Βρείτε το $\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}}$.

Δ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον x΄x και τις ευθείες x=0, x=α, α>0.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αποδείξτε το ζητούμενο με κατάλληλο μετασχηματισμό της δοθείσας σχέσης και λαμβάνοντας υπόψη ότι $g'(x)=g(x)\Leftrightarrow g(x)=ce^x$.

Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο. Έστω δηλαδή ότι η (ε) και η C_f έχουν δύο κοινά σημεία... (Προσοχή χρειάζεται να θεωρήσετε κατάλληλη συνάρτηση).

Γ. Να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας de L'Hospital για τον υπολογισμό του ορίου.

(Απ. Γ. $\lim_{t\to+\infty}\frac{g'(t)}{e^{2t}}=0$, Δ. $E=e^{\alpha}(\alpha-1)^2+2(e^{\alpha}-1)-1$)

31. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $[\alpha,\beta]$ με $f''>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και έστω η $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt-(x-\alpha)\cdot f(\frac{x+\alpha}{2})$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $\frac{1}{2}f'(\xi)(x-\alpha)=f(x)-f(\frac{\alpha+x}{2})$.

Β. Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt>(\beta-\alpha)\cdot f(\frac{\alpha+\beta}{2})$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Εφαρμόστε κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης για την f σε κατάλληλο διάστημα για να αποδείξετε το ζητούμενο.

Β. Βρείτε τη μονοτονία της g με τη βοήθεια του Α ερωτήματος.

Γ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα από τη μονοτονία της g.

(Απ. Β. $g\uparrow$ στο $[\alpha,\beta]$, Ελάχιστο για $x=\alpha$ το $g(\alpha)=0$, Μέγιστο για $x=\beta$ το $g(\beta)$)

32. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $0<\alpha<\beta$, τέτοια ώστε για τους μιγαδικούς αριθμούς $z_1=\alpha+if(\alpha)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\frac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι: $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

Β. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται οι προυποθέσεις του Θ. Rolle για την συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ στο $[\alpha,\beta]$.

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Υπόδειξη: Α. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα αν από τη δοθείσα σχέση καταλήξουμε με πράξεις σε κάτι που ισχύει.

Β. Το ζητούμενο ($g(\alpha)=g(\beta)$) αποδεικνύεται εύκολα με πράξεις.

Γ. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με τη βοήθεια του ερωτήματος Β.

33. Θεωρούμε την εξίσωση: $z^2+\beta z+\gamma=0$, με z μιγαδικό αριθμό και $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Αν μία ρίζα της εξίσωσης είναι ο μιγαδικός αριθμός $z_1=1+i$, τότε:

Α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς β και γ καθώς και την άλλη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{z_1^{2009}+z_2^{2009}}{z_1^{2009}\cdot z_2^{2009}}$, όπου z_1, z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Γ. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $w=\dfrac{z_1+\lambda}{z_2+\lambda}$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ και z_1, z_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού αριθμού w στο μιγαδικό επίπεδο. Ποια είναι η σχετική θέση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 ως προς τον γεωμετρικό τόπο του w;

(Απ. Α. $\beta=-2$, $\gamma=2$, $z_2=1-i$, Β. $A=\dfrac{1}{2^{1004}}$, Γ. Κύκλος με κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1, Τα σημεία $\text{M}_1(z_1)$ και $\text{M}_2(z_2)$ είναι εξωτερικά του κύκλου.)

34. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

(1) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\neq 0$,

(2) $x^2 f'(x)-f(x)=0$, για κάθε $x\neq 0$,

(3) $f(1)=\frac{1}{e}$ και $f(-1)=e$.

Α. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=e^{-\frac{1}{x}},\ x\neq 0$.

Β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τον τύπο και το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$F(x)=\int_1^x (1+\frac{1}{t})f(t)dt$$

Γ. Να αποδείξετε ότι: $\frac{2}{e}(x-1)<F(x)<\frac{x^2-1}{x}f(x)$, για κάθε $x>1$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με κατάλληλο μετασχηματισμό της δοθείσας σχέσης (2) και λαμβάνοντας υπόψη ότι $g'(x)=g(x)\Leftrightarrow g(x)=ce^x$.

Β. Προσοχή: Η εύρεση του συνόλου τιμών της F γίνεται με τη χρήση της μονοτονίας της.

Γ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα 1) από τη μελέτη της μονοτονίας της $g(x)=(1+\frac{1}{x})f(x)$ και με χρήση της ανισωτικής σχέσης των ολοκληρωμάτων ή 2) με χρήση του Θ.Μ.Τ για την F.

(Απ. Β. $D_F=(0,+\infty)$, $F(x)=xe^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{e}$, $F((0,+\infty))=(-\frac{1}{e},+\infty)$)

35. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση $g(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, με $x\in[\alpha,\beta]$.

Α. Να δείξετε ότι: $g(\frac{x+y}{2})<\frac{g(x)+g(y)}{2}$, $x<y$, $x,y\in[\alpha,\beta]$.

Β. Να δείξετε ότι: $g(\lambda_1 x+\lambda_2 y)<\lambda_1 g(x)+\lambda_2 g(y)$, με $\lambda_1+\lambda_2=1$, $x,y\in[\alpha,\beta]$, $x<y$, $\lambda_1,\lambda_2>0$.

Γ. Να δείξετε ότι η g παρουσιάζει σε ένα ακριβώς σημείο του $[\alpha,\beta]$ ολικό ελάχιστο.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. (Ανισότητα Jensen)-άσκηση 17, Β. Αρκεί να αποδείξετε ότι $\lambda_1 x+\lambda_2 y\in[x,y]$ και στη συνέχεια να εφαρμόσετε το Θ.Μ.Τ στο κατάλληλο διάστημα, Γ. <u>Προσοχή:</u> Μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ έχει ολικό ελάχιστο (ή μέγιστο) τουλάχιστον σε ένα σημείο του Δ. Αρκεί λοιπόν να δειχτεί ότι δεν έχει δεύτερο με την απαγωγή σε άτοπο. (Έστω ότι στα σημεία $x_1\neq x_2$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Με πράξεις και τη βοήθεια του Α. ερωτήματος καταλήγουμε σε άτοπο… $g(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2}\overset{g(x_1)=g(x_2)}{=}\frac{2g(x_1)}{2}=g(x_1)$, άτοπο καθώς δεν είναι δυνατόν η τιμή $g(\frac{x_1+x_2}{2})$ να είναι μικρότερη του ολικού ελαχίστου!)

36. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση:

$2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

Α. Να δειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

Β. Να βρεθεί το: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$

Γ. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$h(x) = \int_{-x}^{x} t^{2005} f(t)dt \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$$

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^{x} t^{2005} \cdot f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει μία ακριβώς λύση στο $(0,1)$.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2005)

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Αποδείξτε το ζητούμενο με κατάλληλο μετασχηματισμό της δοθείσας σχέσης, Γ. Να αποδείξτε το ζητούμενο χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση: $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + c$, Δ. Να εφαρμόσετε κατάλληλο θεώρημα ύπαρξης για κατάλληλη συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$.

(Απ. Β. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = 0$)

37. Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α,β με $\alpha<\beta$ και τους μιγαδικούς αριθμούς $z=f(\alpha)+i\alpha$ και $w=f(\beta)+i\beta$ ώστε $\frac{w}{z}\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδειχτεί ότι: $|w+4iz|=|w-4iz|$,

Β. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων,

Γ. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_{\alpha}^{x}\frac{f(2x+\alpha-2t)}{(x-\alpha)(2x+\alpha-2t)}dt=1$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα (α,β).

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Βλέπε άσκηση 32, Β. Βλέπε άσκηση 32, Γ. Με κατάλληλη αντικατάσταση, πράξεις και εφαρμογή του κατάλληλου θεωρήματος ύπαρξης αποδεικνύεται το ζητούμενο.

38. Δίνεται το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\eta\mu x}{e^x + 1} dx$. Να αποδείξετε ότι:

Α. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{xe^x \eta\mu x}{e^x + 1} dx$

Β. $I = \pi$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με την αντικατάσταση: $x = \pi - \pi - u \Rightarrow x = -u$ (Γενικά πρόκειται για την αντικατάσταση της μορφής $x = \alpha + \beta - u$, όπου α, β τα άκρα του εκάστοτε ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, η οποία σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη).

Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με υπολογισμό του αθροίσματος των δύο ίσων ολοκληρωμάτων $I + I = 2I = \ldots$

39. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\quad f:\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$$

για την οποία ισχύει ότι:

$$4\int_{\frac{x}{2}}^{0} tf(x-2t)dt=\ln(1+x),\quad x>-1$$

Α. Να δείξετε ότι: $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)^2}$

Β. Να βρείτε το εμβαδό που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης: $g(x)=(x^3+x^2)f(x)$, τους άξονες x΄x, y΄y και την ευθεία x=1.

Γ. Να βρεθούν οι οριζόντιες ασύμπτωτες της συνάρτησης:

$$h(x)=g(e^x)\eta\mu e^{-x}$$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να χρησιμοποιήσετε κατάλληλη αντικατάσταση και μετά από διαδοχικές παραγωγίσεις να αποδείξετε το ζητούμενο.

Β. Προσοχή: Τα ολοκληρώματα της μορφής $\int\frac{x^2}{x+a}dx$ υπολογίζονται εύκολα με τον παρακάτω μετασχηματισμό:

$$\int\frac{x^2}{x+a}dx=\int\frac{x^2-a^2+a^2}{x+a}dx=\int\frac{x^2-a^2}{x+a}dx+\int\frac{a^2}{x+a}dx=...$$

Γ. Υπολογίστε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$

(Απ. Β. $E=\ln 2-\frac{1}{2}$, Γ. Η y=1 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$)

40. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη δύο φορές στο $\mathbb{R}$, με:

$$f(1) = f(3)$$

και

$$f(x^3) \geq f(3x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f''(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση.

Υπόδειξη: Αρχικά θεωρήστε κατάλληλη συνάρτηση ($H(x) = f(x^3) - f(3x)$) την οποία και να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα.

Στη συνέχεια αποδείξτε το ζητούμενο με τη βοήθεια του Θ. Fermat και τη χρήση του Θ. Rolle στο διάστημα [1, 3].

41. Η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, έχει σύνολο τιμών το $[-2,3]$ και $f(\alpha)=2$, $f(\beta)=1$.

Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$.

Β. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β),

Ι. να αποδειχθεί ότι η C_f δέχεται δύο τουλάχιστον οριζόντιες εφαπτομένες.

ΙΙ. Αν επιπλέον η f' είναι συνεχής στο (α,β), να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιο ώστε: $f(\xi)\cdot[f'(\xi)+f^{2012}(\xi)]=0$.

ΙΙΙ. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε:

$$\frac{1}{f'(\xi_1)}-\frac{1}{2f'(\xi_2)}=\frac{\alpha-\beta}{2}$$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να αποδείξετε το ζητούμενο με τη βοήθεια του θεωρήματος μέγιστης-ελάχιστης τιμής (Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β] και είναι συνεχής σε αυτό, τότε υπάρχουν στοιχεία μ και Μ στο διάστημα [α, β] ώστε f(μ) = min(f) και f(M) = max(f). Προσοχή: Το πιο πάνω δεν ισχύει αν η συνάρτηση είναι ορισμένη σε ανοικτό διάστημα.) και του Θ. Bolzano.

Β. Ι. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια του Α. ερωτήματος και του Θ. Fermat. (Η f παρουσιάζει ακρότατα στα μ, Μ (εσωτερικά σημεία του (α,β)) και άρα $f'(\mu)=f'(\mathrm{M})=0$.)

ΙΙ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με την εφαρμογή του Θ. Bolzano για τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot[f'(x)+f^{2012}(x)]$ στο διάστημα [μ, Μ]$\subseteq(\alpha,\beta)$.

ΙΙΙ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[\alpha,x_o]$ και $[x_o,\beta]$.

42. Αν είναι f συνεχής, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(1)=1$, $z\in\mathbb{C}$, $x\in\mathbb{R}$ και

$$2\int_1^x |z+5i| f(t)dt \le -\int_1^{x^2} |\overline{z}+5i| e^{t-1}dt + 12(x-1)$$

Α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του M(z) (c).

Β. Να βρείτε τον τύπο της $h(x)$ που έχει γραφική παράσταση την (c).

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν που περικλείεται από $H(x)=\int_1^x h(t)dt$, xx΄, yy΄, x=1.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Θεωρήστε τη $g(x)=2\int_1^x |z+5i| f(t)dt + \int_1^{x^2} |\overline{z}+5i| e^{t-1}dt - 12(x-1)$ την οποία και να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα.

Στη συνέχεια βρείτε το ζητούμενο με τη βοήθεια του Θ. Fermat.

<u>Προσοχή:</u> Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του Ε και Ε΄ είναι σταθερό και μεγαλύτερο του (Ε΄Ε). Τα σημεία Ε και Ε΄ λέγονται εστίες της έλλειψης και το (Ε΄Ε) εστιακή απόσταση της έλλειψης.

Η εστιακή απόσταση (Ε΄Ε) είναι ίση με **2γ** και οι εστίες Ε΄(**-γ**,0) και Ε(**γ**,0). Το σταθερό άθροισμα των αποστάσεων κάθε σημείου της έλλειψης από τις εστίες της είναι ίσο με **2α**. Η εξίσωση της έλλειψης είναι:

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1 \text{ όπου } \beta^2=\alpha^2-\gamma^2$$

(Απ. Α. Έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$, Β. $h(x)=\sqrt{\frac{16}{9}(x^2-9)}$

Γ. $E=\int_0^1 |H(x)|dx = \int_0^1 H(x)dx = \int_0^1 x' H(x)dx = \ldots = -\frac{2}{3}\int_{-9}^{-8} u^{\frac{1}{2}}du = \ldots$)

43. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F με

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt$$

είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αν $f(x)>0$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\displaystyle\int_{\eta\mu x}^{x} f(t)dt=0$.

Υπόδειξη: Β. Δεδομένου ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Α. ερώτημα) θα είναι και ΄1-1΄ και επομένως θα ισχύει $F(x_1)=F(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. Η ζητούμενη εξίσωση μπορεί να λυθεί με την παραπάνω ιδιότητα. (Σημειώστε επίσης ότι ισχύει $|\eta\mu x|\le|x|$ $\forall x\in\mathbb{R}$).

(Απ. Β. Η ισότητα ισχύει μόνο για x=0)

44. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=(x^2-2x+3)e^x-\frac{x^3}{3}-x+3$$

Α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδειχθεί ότι είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $M=(\alpha,\beta)$ για τα οποία ισχύει:

$$\int_{x^2-4x}^{2y-y^2} f(t)dt=0.$$

(Απ. Α. $f\downarrow$ στο $(-\infty,0]$, $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, Ελάχιστο το $f(0)=6$, Β. Κύκλος με κέντρο Κ(2,1) και ακτίνα $\rho=\sqrt{5}$)

45. Να αποδείξετε ότι για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει:

$$f^{'}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^{x}\text{, όπου } c \text{ σταθερά.}$$

Α. Να βρεθεί η θετική και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(x)=(1+x^2)\left[1+\int_1^x \frac{f(t)}{1+t^2}dt\right] \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Β. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση (c) διαθέτει δύο σημεία καμπής τα οποία ας σημειώσουμε έστω με Κ και Λ.

Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που οριοθετείται από την (c) και το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια της σχέσης: $f^{'}(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=ce^{x}$.

Γ. Η ευθεία ΚΛ έχει εξίσωση: $y-y_{\mathrm{K}}=\dfrac{y_{\Lambda}-y_{\mathrm{K}}}{x_{\Lambda}-x_{\mathrm{K}}}(x-x_{\mathrm{K}})\Rightarrow y-f(-1)=\ldots$

Ανάμεσα στα σημεία Κ, Λ η f είναι κοίλη, άρα $C_f\geq \mathrm{K\Lambda}\Rightarrow f(x)-\mathrm{K\Lambda}\geq 0$.

(Απ. Α. $f(x)=e^{x-1}(x^2+1)$, Β. $f\uparrow$ στο $\mathbb{R}$, Σ. Κ.: Κ(-1, $f(-1)$) και Λ(1, $f(1)$),

Γ. $E=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-\mathrm{K\Lambda}\right|dx=\int_{-1}^{1}(f(x)-\mathrm{K\Lambda})dx=\ldots$)

46. Έστω f δύο φορές παραγωγίσιμη, με: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) = e^{\alpha}$, $f(\beta) = e^{\beta}$.

Α. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = f(\xi)$.

Β. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $g(x) = \dfrac{f(x)}{2e^{x+2004}}$ έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

Γ. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o) - f(x_o) + (x_o - \alpha)(f''(x_o) - f'(x_o)) = 0 .$$

Δ. Να υπολογίσετε το γινόμενο: $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f'(x)}{f(x)} dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \frac{2004}{(\beta - \alpha)^2} dx$.

Ε. Έστω συνεχής συνάρτηση $h : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(1 + x^{1975})h(x) + f(x) \le (x^{29} + x^{2004})h(x) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Να αποδείξετε ότι η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Θεωρήστε κατάλληλη συνάρτηση ($g(x) = \ln(f(x)) - x$) για την οποία να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στο διάστημα [α,β]. Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια του Α. ερωτήματος. Γ. Να θεωρήσετε κατάλληλη συνάρτηση ($h(x) = (x - \alpha)(f'(x) - f(x))$) για την οποία να εφαρμόσετε το Θ. Rolle στο διάστημα $[\alpha, \xi] \subseteq [\alpha, \beta]$. Ε. Το ζητούμενο αποδεικνύεται με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι η h <u>δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο</u> στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε επειδή είναι και συνεχής, σύμφωνα με το Θ. Bolzano θα υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ ώστε $h(x_o) = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $f(x_o) \le 0$ από τη δοσμένη σχέση και είναι άτοπο, δεδομένου ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

(Απ. Δ. 2004)

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^4-\beta x^3+(\alpha+1)x+\beta$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_1=-\frac{1}{2}$ και έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(1, f(1))$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της f.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Να δείξετε ότι $f(e^{2x}+2)>f(2e^x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ. Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες.

Ε. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim\limits_{x\to-\infty}\log[f(x)]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\log[\frac{1}{f(x)}]$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\log[f(x)]}$.

Στ. Να υπολογίσετε τα: Ι. $\int\frac{2x^3-3x^2+1}{f(x)}dx$ και ΙΙ. $\int[f'(x)\ln[f(x)]+f'(x)]dx$.

Ζ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, του άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

<u>Υπόδειξη:</u> Γ. Αρκεί να δείξετε ότι $e^{2x}+2>2e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ζητούμενο προκύπτει εύκολα από την μονοτονία της f ($f\uparrow$ για $2e^x>0$).

(Απ. Α. $f(x)=x^4-2x^3+2x+2$, Β. $f\downarrow$ στο $(-\infty,-\frac{1}{2}]$, $f\uparrow$ στο $[-\frac{1}{2},1]$ και $[1,+\infty)$, Τ.Ε. το $f(-\frac{1}{2})=\frac{21}{16}$, Δ. Δεν έχει ασύμπτωτες, Ε. $\lim\limits_{x\to-\infty}\log[f(x)]=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\log[\frac{1}{f(x)}]=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{\log[f(x)]}=0$, Στ. Ι. $\frac{1}{2}\ln\left|x^4-2x^3+2x+2\right|+c$,

ΙΙ. $f(x)\cdot\ln(f(x))+c$, Ζ. $E=\frac{1}{3}+2\ln 2$ τ.μ.)

48. Έστω (C) ο γεωμετρικός τόπος, των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z-3i|=2$. Θεωρούμε επίσης (ε) τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z|=|z-4|$.

Α. Αν z μιγαδικός με εικόνα στον (C), να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$4\bar{z}(\frac{1}{\bar{z}}+z)+(\frac{\sqrt{1901}|z|}{5}-1)(\frac{\sqrt{1901}|z|}{5}+1)$$

Β. Αν z μιγαδικός με εικόνα στον (ε) και $w=-2002+1975i$ να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση: $|w-z|$.

Γ. Έστω z_1 ο μιγαδικός που έχει εικόνα το κοινό σημείο των (C) και (ε). Αν ο z_1 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{1}{2}x^2+\beta x+\gamma=0$, με $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, τότε να βρεθούν οι β,γ.

Δ. Έστω (C_κ) ο γεωμετρικός τόπος των z για τους οποίους ισχύει:

$|z-3i|=\kappa$ με $\kappa\in(0,+\infty)$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του κ οι (C_κ) και (ε) έχουν δύο κοινά σημεία.

Ε. Έστω (ε_λ) ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z για τους οποίους ισχύει: $|z|=|z+\lambda|$, με $\lambda\in\mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ οι (ε_λ) και (C) έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο.

(Απ. Α. 2004, Β. $|w-z|_{\min}=2004$, Γ. $\beta=-2$, $\gamma=\frac{13}{2}$, Δ. κ>2, Ε. $\lambda\geq 4$)

49. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο:

$$g(x)=\int_0^x xf(t)dt+\int_x^{2x} f(t-x)dt .$$

Α. Να δείξετε ότι $g(x)=(x+1)\int_0^x f(t)dt$.

Β. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$\int_\xi^0 f(t)dt=(\xi+1)f(\xi) .$$

Γ. Αν $2f(x)+(x+1)f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g στρέφει τα κοίλα άνω.

Δ. Αν είναι γνωστό ότι $f(0)=f'(0)=0$ και η f' είναι παραγωγίσιμη στο 0, να δείξετε ότι ορίζεται η $3^{η}$ παράγωγος της g στο 0 και ισούται με $g^{(3)}(0)=f''(0)$.

Ε. Αν είναι γνωστό ότι $f(x)<0$ για κάθε $x\in[0,1]$ και $g(1)=-4012$, τότε να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Υπόδειξη: Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με κατάλληλη αντικατάσταση στο $2^{ο}$ ολοκλήρωμα της δοθείσας σχέσης.

Β. Εφαρμόστε το Θ. Rolle στο διάστημα $[-1,0]$ για τη συνάρτηση $g(x)$.

Γ. Αρκεί να δείξετε ότι $g''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ. Να αποδείξετε το ζητούμενο με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου σε σημείο.

(Απ. Ε. Με τη βοήθεια του Α. ερωτήματος αποδεικνύεται ότι: Ε=2006 τ.μ.)

50. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$$\int_2^x xf(t)dt = x^5 - 2x^4 \text{, για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Α. Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ υπάρχει $\xi > x$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{x+1}{\xi^2}\int_2^{x+1} f(t)dt - \frac{x}{\xi^2}\int_2^x f(t)dt = 5\xi^2 - 8\xi.$$

Β. Να βρείτε τον τύπο της f.

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f, η οποία διέρχεται από το σημείο Α(0,-40).

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για κατάλληλη συνάρτηση ($g(x) = \int_2^x xf(t)dt = x^5 - 2x^4$) στο διάστημα [x, x+1].

(Απ. Β. $f(x) = 4x^3 - 6x^2$ με $x \in (0,+\infty)$, Γ. $y = 24x - 40$)

51. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$f(x) = e^x + \int_0^1 e^x f(x)dx,$$

τότε:

Α. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

Β. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της βρίσκεται κάτω από την C_f.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα αν θέσετε $\int_0^1 e^x f(x)dx = c$.

Β. Για να βρίσκεται η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο της κάτω από την C_f, αρκεί η f να είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$.

(Απ. Α. $f(x) = e^x + \dfrac{e^2 - 1}{2(2-e)}$, Β. $f''(x) = e^x > 0$)

52. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{3+\eta\mu^2 t}dt \text{ με } x\in[0,\pi].$$

Α. Να βρείτε την παράγωγο και το πρόσημο της f.

Β. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\mathrm{I}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\eta\mu x}{3+\eta\mu^2 x}dx.$$

Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία x=π.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με κατάλληλη αντικατάσταση ($u=\sigma\upsilon\nu x$).

(Απ. Α. $f'(x)=-\eta\mu x\int_{\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{1}{3+\eta\mu^2 t}dt+\sigma\upsilon\nu x\frac{1}{3+\eta\mu^2 x}$, Ισχύουν ότι: $x<\frac{\pi}{2}\to f'(x)>0$,

$x>\frac{\pi}{2}\to f'(x)<0$, Από την μονοτονία προκύπτει: $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$,

Β. $\mathrm{I}=\frac{1}{4}\ln 3$, Γ. $\mathrm{E}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}|f(x)|dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx=...=\frac{1}{4}\ln 3$)

53. Δίνεται οι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Έστω και η συνάρτηση g με τύπο: $g(x)=\int_{5-x}^{1+x} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$g'(2+x)=g'(2-x).$$

Β. Η εξίσωση

$$f(1+x)+f(5-x)=\frac{1}{x}\int_{1+x}^{5-x} f(t)dt$$

έχει λύση στο διάστημα (0,2).

Γ. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει μόνο ένα σημείο καμπής το οποίο και να βρείτε.

Υπόδειξη: Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα μετά από πράξεις.

Β. Εφαρμόστε το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,2]$ για κατάλληλη συνάρτηση.

Γ. Βρείτε το $g''(x)$ και με τη βοήθεια της δοθείσας σχέσης $f''(x)>0$ αποδείξτε το ζητούμενο. Προσοχή: Μην ξεχνάτε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση είναι και ΄1-1΄.

(Απ. Γ. Η g έχει σημείο καμπής το Α(2,0))

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Β. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\ln(x+1)} \frac{dt}{1+t^2} \le \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $x>-1$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(\varepsilon\varphi x)=x$, $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$ τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 και x=1.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με τη βοήθεια της μονοτονίας της $f(x)$. Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην ισοδύναμη σχέση $\ln(x+1)\le x$ την οποία και αποδεικνύουμε μελετώντας την μονοτονία της συνάρτησης:

$$h(x)=\ln(x+1)-x, x>-1.$$

Γ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα μετά τον υπολογισμό της παραγώγου $(f(\varepsilon\varphi x))'$.

Δ. Να αποδείξετε το ζητούμενο με τη βοήθεια του ερωτήματος Γ. (Δίνεται ότι $\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$)

(Απ. Δ. $\text{E}=\frac{\pi}{4}$)

55. Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,e)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=0$ η οποία για κάθε $x\in(0,e)$ ικανοποιεί τη σχέση $\ln(f'(x))=f(x)-\ln x$.

Α. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Β. Αν $f(x)=-\ln(1-\ln x)$, $x\in(0,e)$.

Ι. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e)$.

ΙΙ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

ΙΙΙ. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος.

IV. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $1-\ln x=\frac{1}{e^{\alpha}}$, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Βρείτε την ζητούμενη συνάρτηση με κατάλληλο μετασχηματισμό της δοθείσας σχέσης $\ln(f'(x))=f(x)-\ln x$ και χρησιμοποιώντας την γνωστή ιδιότητα: $h'(x)=g'(x)\Rightarrow h(x)=g(x)+c$, Β. ΙΙΙ. Μελετήστε την μονοτονία της f' για να βρείτε το ζητούμενο, Β. IV. Με κατάλληλο μετασχηματισμό της δοθείσας σχέσης (λογαριθμίζουμε κατά μέλη) και με τη βοήθεια των προηγούμενων ερωτημάτων να βρείτε το ζητούμενο.

(Απ. Α. $f(x)=-\ln(1-\ln x)$, $x\in(0,e)$, Β. ΙΙ. $f(\mathrm{A})=\mathbb{R}$, ΙΙΙ. x=1, IV. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=\alpha$ έχει μοναδική λύση)

56. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^{'}(x)=\frac{2e^x+x^2}{e^x+x^2} \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

<u>Υπόδειξη-Λύση:</u> Γ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f^{'}(x)>0$, που σημαίνει ότι $f\uparrow$.

Επειδή επιπλέον η f είναι και συνεχής, το σύνολο τιμών της είναι

$f(\mathbb{R})=(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x))$.

Για κάθε $x\in(-\infty,0)\ \to\ g(x)<g(0)\Rightarrow...\Rightarrow f(x)<x+f(0)$

Όμως είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+f(0))=-\infty$, που σημαίνει ότι $x+f(0)<0\Rightarrow f(x)<0$ σε περιοχή του $-\infty$. Άρα έχουμε: $f(x)<x+f(0)\Rightarrow 0>\dfrac{1}{f(x)}>\dfrac{1}{x+f(0)}$.

Επιπλέον είναι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x+f(0)}=0$ και από το Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$ και $f(x)<0$ σε περιοχή του $-\infty$, συμπαιρένουμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. Με αντίστοιχο ακριβώς τρόπο αποδεικνύεται ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(Απ. Α. Η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$, η f είναι κοίλη στο $[0,2]$,

Γ. $f(\mathbb{R})=(-\infty,+\infty)$)

57. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1=\alpha+if(\alpha)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$.

Β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ ικανοποιεί τις προυποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ. Αν ισχύει $\lim\limits_{x\to\alpha}\displaystyle\int_{\alpha}^{x}\frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=1$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^{'}(x)=1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα αν από τη δοθείσα σχέση καταλήξουμε με πράξεις σε κάτι που ισχύει. Εναλλακτικά το ζητούμενο προκύπτει και με ευθεία απόδειξη με χρήση της ιδιότητας $|z|=|\overline{z}|$ και πράξεις. Β. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με πράξεις. Δ. Θεωρείστε κατάλληλη συνάρτηση για την οποία να εφαρμόσετε το θεώρημα Rolle στο (α,β).

58. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x)=\int_1^x \frac{t+1}{t(e^{f(t)}+1)}dt \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Α. Να αποδείξετε ότι $e^{f(x)}+f(x)=x+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

Γ. Αν $0<\alpha<\beta<\gamma$ να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}>\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.

Δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης g, για την οποία ισχύει $g^2(x)=f\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $g(1)=1$.

Υπόδειξη: Α. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με παραγώγιση της συνάρτησης $f(x)$.

Β. Θεωρείστε κατάλληλη συνάρτηση ($\varphi(x)=e^x+x$, $x\in\mathbb{R}$) και αποδείξτε μέσω της μονοτονίας της, ότι αυτή είναι ΄1-1΄. Κατόπιν αποδείξτε το ζητούμενο με κατάλληλο μετασχηματισμό της σχέσης του Α ερωτήματος.

Προσοχή: Ισχύει ότι: $e^{\ln x}=x$.

Γ. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με χρήση του Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $f(x)$ σε κατάλληλα διαστήματα και από τη μονοτονία της $f'(x)$.

Δ. Αρχικά βρείτε τον τύπο της $g(x)$ και κατόπιν τη μονοτονία της.

(Απ. Δ. $g(\text{A})=[1,+\infty)$)

59. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)\geq xe^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$.

Β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^2(x)}{x\eta\mu x}=1$.

Γ. Αν $\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=1$, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f στο διάστημα $[0,1]$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Θεωρείστε κατάλληλη συνάρτηση και αποδείξτε το ζητούμενο με τη χρήση του θεωρήματος Fermat.

Β. Για να βρείτε το ζητούμενο όριο να κάνετε χρήση του Α. ερωτήματος και του ορισμού της παραγωγισιμότητας σε σημείο.

Γ. <u>Λύση:</u> Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ότι:

$$f(x)\geq xe^{2x}\Leftrightarrow f(x)e^{-x}\geq xe^{x}\Leftrightarrow f(x)e^{-x}-xe^{x}\geq 0\Leftrightarrow h(x)\geq 0$$

Θέτουμε $h(x)=f(x)e^{-x}-xe^{x}$, $x\in\mathbb{R}$. Με πράξεις αποδεικνύεται ότι: $\int_0^1 h(x)dx=0$.

Έχουμε λοιπόν ότι: $h(x)\geq 0$ και $\int_0^1 h(x)dx=0$ (1).

Έστω ότι υπάρχει $x_o\in[0,1]$ τέτοιο ώστε $h(x_o)\neq 0$. Τότε είναι $h(x_o)>0$. Άρα η συνεχής συνάρτηση $h(x)$ δεν είναι παντού μηδέν, οπότε $\int_0^1 h(x)dx>0$ που είναι όμως άτοπο λόγω της (1). Επομένως για $x\in[0,1]$ είναι $h(x)=0\Rightarrow f(x)=...$

(Απ. Γ. $f(x)=xe^{2x}$)

60. Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(1)=\dfrac{1}{e-1}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $xf'(x)-f(x)=-\dfrac{x^2e^x}{(e^x-1)^2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Α. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}dx$.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Γ. Να αποδείξετε ότι $f(0)=1$ και $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Να βρείτε το ζητούμενο με κατάλληλη αντικατάσταση.

Β. Να αποδείξετε το ζητούμενο με κατάλληλο μετασχηματισμό της δοθείσας σχέσης και με τη βοήθεια του Α. ερωτήματος.

Γ. Να αποδείξετε τα ζητούμενα με τη βοήθεια του ορισμού της συνέχειας και της παραγωγισιμότητας στο σημείο $x_o=0$.

(Απ. Α. $\int\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}dx=-\dfrac{1}{e^x-1}+c$)

61. Δίνεται η συνάρτηση f, που είναι ορισμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x)=\int_x^0\left(\int_0^\pi f(t)\eta\mu x dx\right)dt+x^2 \text{, για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Γ. Αν $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

Ι. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f, ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

ΙΙ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

<u>Υπόδειξη-Λύση:</u> Β. Ξεκινάμε από την αποδειχθείσα σχέση του ερωτήματος Α. και με κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$f'(x)=-2f(x)+2x \Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=2x \overset{\cdot e^{2x}}{\Leftrightarrow} f'(x)e^{2x}+2f(x)e^{2x}=2xe^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\left(f(x)e^{2x}\right)'=2xe^{2x} \Leftrightarrow f(x)e^{2x}=\int 2xe^{2x}dx \Leftrightarrow f(x)=e^{-2x}\int 2xe^{2x}dx \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(x)=\ldots$$

(Απ. Α. $f'(x)=-2f(x)+2x$, $x\in\mathbb{R}$, Β. $f(x)=\frac{1}{2}e^{-2x}+x-\frac{1}{2}$, $x\in\mathbb{R}$, Γ. $f\downarrow$ στο $(-\infty,0]$, $f\uparrow$ στο $[0,+\infty)$, Ελάχιστο στο $x_o=0$ το $f(0)=0$, Δ. $f(\Delta)=[0,+\infty)$)

62. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)=\int_0^x \frac{2}{1+3f^2(t)}dt$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να αποδείξετε ότι $f^3(x)+f(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt$.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=2x_o$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα με παραγώγιση της συνάρτησης $f(x)$.

Β. Αρκεί να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως μονότονη (αύξουσα) στο $\mathbb{R}$.

Γ. Παρατηρείστε ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι η ποσότητα $f(1)$. Κατόπιν υπολογίστε το ολοκλήρωμα με τη βοήθεια του Α. ερωτήματος και με χρήση του σχήματος Horner.

Δ. Εφαρμόστε το Θ. Rolle στο διάστημα $[0,1]$ για κατάλληλη συνάρτηση.

(Απ. Γ. $\int_0^1 \frac{2}{1+3f^2(t)}dt=1$)

63. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $f(\alpha)<f'(x)<f(\beta)$ (1), όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha=\beta-1>0$ (2).

Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Β. Η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f(\alpha)\cdot x$ είναι γνησίως αύξουσα και ότι $f(\alpha)<\dfrac{f(\beta)}{2}$.

Γ. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς λύση στο $(-\beta,\alpha)$.

Δ. Υπάρχουν $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$\frac{f(\beta)}{f'(x_3)}+\frac{f(\alpha)}{f'(x_2)}-2\frac{f(-\beta)}{f'(x_1)}=4\beta-1.$$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και χρησιμοποιώντας την σχέση (1) ($f'(\xi)<f(\beta)$, $\xi\in(\alpha,\beta)$) δείξτε ότι $f(\alpha)>0$.

Β. Η ζητούμενη σχέση $f(\alpha)<\dfrac{f(\beta)}{2}$ προκύπτει εύκολα από την μονοτονία της συνάρτησης $g(x)$.

Γ. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με εφαρμογή του Θ. Bolzano για την f στο διάστημα $[-\beta,\alpha]$. <u>Προσοχή:</u> Προκειμένου να εφαρμόσετε το Θ. Bolzano πρέπει αρχικά να αποδειχτεί ότι $f(-\beta)<0$ (εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ. για την f στο διάστημα $[-\beta,\alpha]$ και δείξτε το ζητούμενο με τη βοήθεια της σχέσης (1)). Μην ξεχνάτε ότι η μοναδικότητα της λύσης εξασφαλίζεται από την μονοτονία της f.

Δ. Έχουμε ότι $-\beta<\rho<\alpha<\beta$, όπου ρ η ρίζα της $f(x)=0$ (ερώτημα Γ.). Το ζητούμενο αποδεικνύεται με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[-\beta,\rho]$, $[\rho,\alpha]$ και $[\rho,\beta]$ και πράξεις.

64. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$4f''(x)(f(x))^3=-1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)

$f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)

$2f'(1)=f(1)=1$ (3)

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι $(2f(x)f'(x))^2=1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Γ. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

Δ. Αν $f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$, τότε:

Ι. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $\mathrm{M}(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha>0$.

ΙΙ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη (ε) και τον άξονα x΄x.

ΙΙΙ. Αν ένα σημείο Μ κινείται στη γραφική παράσταση της f έτσι, ώστε να απομακρύνεται από τον άξονα y΄y με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε του χωρίου Ω τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του είναι ίση με 4 μονάδες.

IV. Να βρείτε $\lambda\in(-\alpha,\alpha)$ τέτοιο, ώστε η ευθεία με εξίσωση $x=\lambda$ να χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο (Έστω ότι υπάρχει $x_o\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_o)=0$ τότε από την (1) καταλήγουμε εύκολα σε άτοπο).

Β. Ξεκινώντας από τη σχέση (1) και με τη βοήθεια της (2) και κατάλληλους μετασχηματισμούς αποδεικνύουμε το ζητούμενο. Πιο συγκεκριμένα για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι: $4f''(x)(f(x))^3=-1\overset{(2)}{\Rightarrow}4f''(x)(f(x))^3f'(x)=-f'(x)\Rightarrow ...$

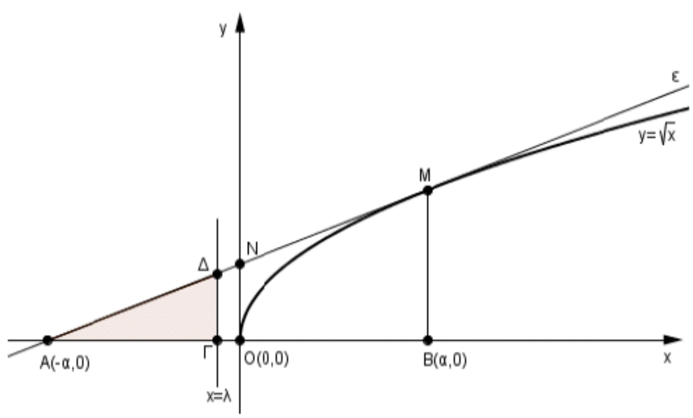
$$\Rightarrow\left(2(f'(x))^2\right)'=\left(-\frac{(f(x))^{-2}}{-2}\right)'\Rightarrow ...$$

Γ. Βρείτε το ζητούμενο με τη βοήθεια του Β. ερωτήματος

$(2f(x)f'(x))^2=1\Rightarrow 2f(x)f'(x)=1\Rightarrow f(x)=...$

<u>Προσοχή:</u> Είναι $g(x)=2f(x)f'(x)\neq 0$ και παράλληλα από την (3) προκύπτει ότι η $g(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και μάλιστα θετικό → $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Δ. IV. Δίνεται το ακόλουθο βοηθητικό σχήμα:



(Απ. Γ. $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$, Δ. Ι. $(\varepsilon): x-2\sqrt{\alpha}\cdot y+\alpha=0$, ΙΙ. $\mathrm{E}=\frac{1}{3}\alpha\sqrt{\alpha}$ τ.μ., ΙΙΙ. $\mathrm{E}'(t_o)=2$ τ.μ./sec, IV. $\lambda=\frac{\sqrt{6}-3}{3}\alpha$)

65. Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις: $f''(x)-f(x)=(4x+2)e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1), $f'(0)=f(0)=0$ (2)

Α. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^2e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Γ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(-1,1)$ τέτοια, ώστε $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)=3$.

Ε. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)dt$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Το ζητούμενο αποδεικνύεται <u>σχετικά δύσκολα</u> από τη σχέση (1) με κατάλληλες πράξεις (Αρχικά προσθαφαιρέστε την ποσότητα $f'(x)$ στο αριστερό μέλος της (1) και κατόπιν πολλαπλασιάστε κατά μέλη με την ποσότητα e^{-x}. Συνεχίστε με κατάλληλες πράξεις... Θα προκύψει μία σχέση που περιέχει την $f'(x)$ και την $f(x)$. Πολλαπλασιάστε κατά μέλη με την ποσότητα e^{2x} και συνεχίστε με πράξεις για να δείξετε το ζητούμενο). Δ. Εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ για την f' στα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$. Ε. Για $t\in[x-1,x]$ με $x<-2$ είναι:
$x-1\le t\le x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x-1)\le f(t)\le f(x)$

Άρα έχουμε: $\int_{x-1}^{x} f(x-1)dt\le\int_{x-1}^{x} f(t)dt\le\int_{x-1}^{x} f(x)dt \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow f(x-1)\le\int_{x-1}^{x} f(t)dt\le f(x)$

Από το Κριτήριο Παρεμβολής προκύπτει το ζητούμενο.

(Απ. Β. Η y=0 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, Γ. $f\uparrow$ στο $(-\infty,-2]\cup[0,+\infty)$, $f\downarrow$ στο $[-2,0]$, Τ.Μ. στο $x_1=-2$ με $f(-2)=4e^{-2}$, Ολικό. Ελ. στο $x_2=0$ με $f(0)=0$, Ε. $\lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)dt=0$)

66. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^{x^3} e^{t^2}dt$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Β. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f, στο σημείο της Ο(0,0) είναι ο άξονας x΄x.

Γ. $f(x)\geq \frac{1}{3}x^9$ για κάθε $x\geq 0$.

Δ. $6\int_0^1 x^2 f(x)dx-2\int_0^1 e^{x^2}dx=1-e$

<u>Υπόδειξη:</u> Γ. Για να αποδείξετε το ζητούμενο να θεωρήσετε κατάλληλη συνάρτηση ($g(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^9, x\in\mathbb{R}$) την οποία και να μελετήσετε ως προς την μονοτονία. <u>Προσοχή:</u> Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $e^x\geq x+1>x$ (χρειάζεται πάντα απόδειξη όταν χρησιμοποιείται)

Δ. Με κατάλληλες πράξεις αποδεικνύεται το ζητούμενο.

$$6\int_0^1 x^2 f(x)dx-2\int_0^1 e^{x^2}dx=6\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}\right)' f(x)dx-2\int_0^1 e^{x^2}dx=...=1-e$$

(Απ. Α. $f'(x)=3x^2e^{x^6}$, $x\in\mathbb{R}$, Β. $(\varepsilon): y=0$)

67. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_1^x f(t)dt + x\ln\left(\frac{x}{4}\right) - x + 1 + 2\ln 2 = \int_1^x\left(\int_1^u \frac{f(t)}{t+1}dt\right)du,\ x>0 \quad (1)$$

Α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)' = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}$, $x>0$ και να βρείτε στη συνέχεια τον τύπο της f.

Β. Αν $f(x)=(x+1)\ln\frac{x+1}{x}$, $x>0$ τότε:

Ι. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία, να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x+1 = xe^{\frac{2012}{x+1}}$, $x>0$ έχει μία ακριβώς θετική ρίζα.

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Ι. <u>Προσοχή:</u> Η παράγωγος της f είναι ίση με $f'(x)=\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}$, $x>0$. Προκειμένου να καθορίσουμε το πρόσημό της, εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση $g(t)=\ln t$ στο διάστημα $[x,x+1]$, $x>0$. Με αυτό τον τρόπο και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}<0$.

ΙΙ. Μετά από κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στο ότι $f(x)=2012$. Δεδομένου ότι η f είναι ΄1-1΄ ως γνησίως φθίνουσα και ο αριθμός 2012 ανήκει στο σύνολο τιμών της f, τότε η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία θετική ρίζα.

(Απ. Α. $f(x)=(x+1)\ln\frac{x+1}{x}$, $x>0$, Β. Ι. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα, Η ευθεία x=0 (άξονας y΄y) είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f, η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, $f(\mathrm{A})=(1,+\infty)$)

68. Έστω οι δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$f(f'(x))+f(x)=0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (1)

$f'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$ (2)

$f(1)=0$ (3)

Α. Ι. Να βρείτε το $f'(1)$.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι $f'(f'(x))=x$, $x\in(0,+\infty)$.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Ι. Το ζητούμενο μπορεί να βρεθεί εύκολα δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι ΄1-1΄ ως γνησίως αύξουσα για $x\in(0,+\infty)$.

ΙΙ. Το ζητούμενο προκύπτει εύκολα με τη βοήθεια της σχέσης (1) (Να θέσετε όπου x το $f'(x)$ και κατόπιν να προσθέσετε κατά μέλη την ποσότητα $f(x)$. Με κατάλληλες πράξεις προκύπτει τελικά το ζητούμενο).

Β. Για να βρούμε τον τύπο της f, αρχικά παραγωγίζουμε κατά μέλη την σχέση (1) και συνεχίζουμε με πράξεις χρησιμοποιώντας και το ερώτημα Β.

(Απ. Α. Ι. $f'(1)=1$)

69. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$2\sigma\upsilon\nu x+\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-x\eta\mu x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)

$f(0)=0$ (2)

$f'(0)=\alpha$ (3)

Α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

Β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$.

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ διότι ο τύπος της, προκύπτει μετά από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από τα διαστήματα. Επιπλέον από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_o=0$, άρα είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Από τον ορισμό της παραγώγου σε σημείο είναι εύκολο να προσδιοριστεί ο πραγματικός αριθμός α.

Β. Το ζητούμενο αποδεικνύεται μετά από διπλή παραγώγιση της σχέσης (1).