ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

- **Πιθανότητες**
- **Πραγματικοί αριθμοί**
- **Εξισώσεις**
- **Ανισώσεις**
- **Πρόοδοι**
- **Βασικές έννοιες των συναρτήσεων**
- **Μελέτη βασικών συναρτήσεων**

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ | **ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ (ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ)**
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ (ΕΚΠΑ)
ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟ ΠΡΟΦΙΛ: http://teacherfinder.gr/idiaitera-mathimata/nikos-aleksandris
E-mail: ediaitero@gmail.com
Τηλ. 6944393147

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΡΟΟΔΟΙ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

<u>ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</u>

<u>ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ</u>

<u>ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ</u>

<u>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</u>

ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΙΑ

Πείραμα Τύχης

Πείραμα τύχης λέγεται κάθε πείραμα που είναι δυνατό να επαναληφθεί πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες και του οποίου δεν μπορούμε να προβλέψουμε το αποτέλεσμα.

Δειγματικός Χώρος

Δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος τύχης και συμβολίζεται με Ω.

- Αν $\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος Ω είναι:

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$$

Ενδεχόμενο

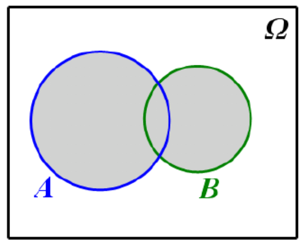
Αν Ω είναι ένας δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε ονομάζουμε ενδεχόμενο του πειράματος κάθε υποσύνολο του Ω.

Παράδειγμα: Αν ρίξουμε ένα νόμισμα δύο φορές, παρατηρώντας μετά από κάθε ρίψη την όψη που εμφανίζεται στο νόμισμα, εκτελούμε ένα πείραμα τύχης. Ο δειγματικός χώρος του πειράματος αυτού είναι: Ω={ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ}. Έστω λοιπόν ότι μας ενδιαφέρει το αποτέλεσμα ‘οι δύο ενδείξεις είναι ίδιες’, τότε το αποτέλεσμα είναι στοιχείο του συνόλου Α={ΚΚ, ΓΓ}. Το υποσύνολο Α του Ω το λέμε στην περίπτωση αυτή ενδεχόμενο του πειράματος.

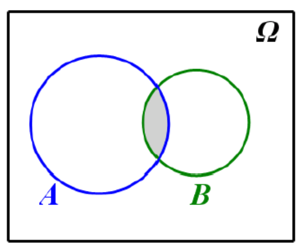
<u>Πράξεις με Ενδεχόμενα</u>

Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω τότε ορίζουμε:

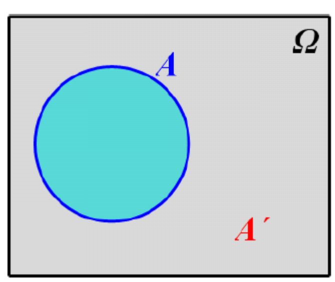
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$ που διαβάζεται '<u>Α ένωση Β</u>' και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α και Β.



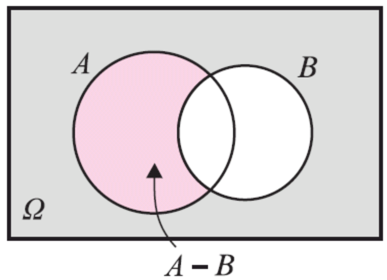
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$ που διαβάζεται '<u>Α τομή Β</u>' και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα Α και Β.



- Το ενδεχόμενο A' που διαβάζεται '<u>αντίθετο του Α</u>' ή '<u>συμπληρωματικό του Α</u>' και πραγματοποιείται όταν δεν πραγματοποιείται το Α.



- Το ενδεχόμενο $A - B$ που διαβάζεται ‘διαφορά του Β από το Α’ και πραγματοποιείται όταν πραγματοποιείται το Α και όχι το Β.



Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι:

- $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
- $(B - A) \cup (A \cap B) = B$
- $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$
- $A - B = A \cap B'$

Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Δύο ενδεχόμενα Α, Β λέγονται ασυμβίβαστα (ή ξένα μεταξύ τους) όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία, δηλαδή όταν ισχύει ότι:

$$A \cap B = \varnothing$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα 3 φορές και καταγράφουμε τις ενδείξεις του:

Γράμματα (Γ), Κεφαλή (Κ)

1) Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

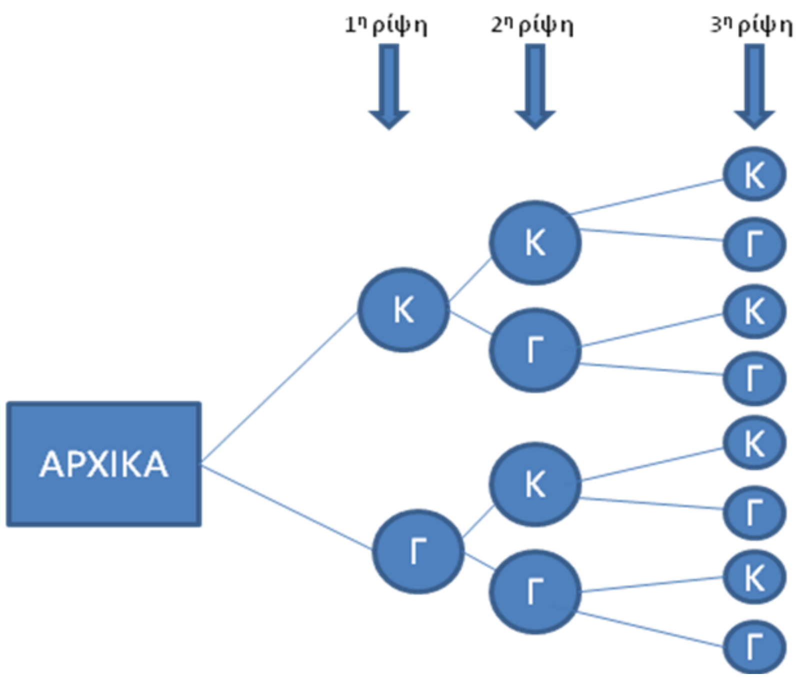
2) Να γράψετε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: Να φέρουμε ακριβώς δύο φορές κεφαλή.

Β: Να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά γράμματα.

Λύση:

1) Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα φαίνεται ο δειγματικός χώρος του πειράματος.



Άρα είναι: Ω={ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

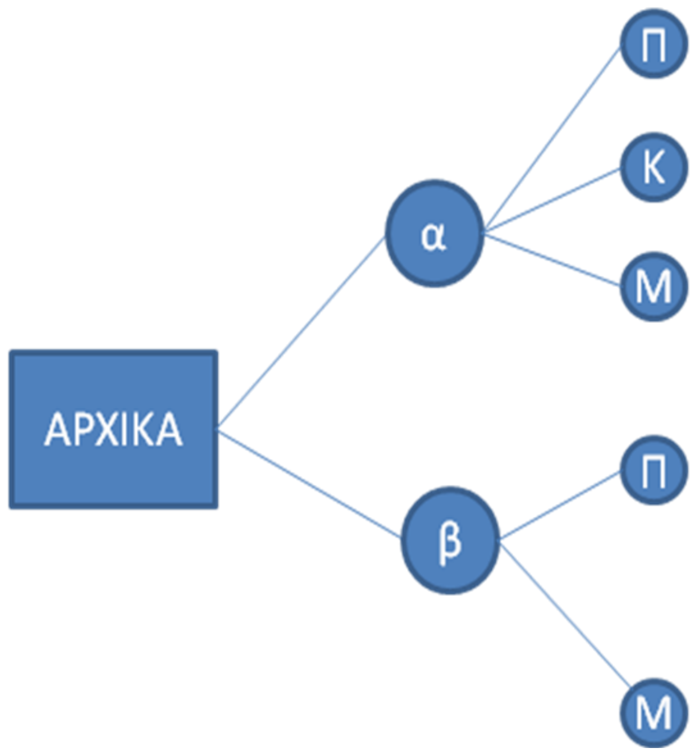
2) Α={ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ}

Β={ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ}

2. Έστω ότι έχουμε δύο κουτιά α και β, το α περιέχει πράσινες (Π) σφαίρες, κίτρινες (Κ) και μαύρες (Μ) σφαίρες. Το β περιέχει πράσινες και μαύρες σφαίρες. Διαλέγουμε τυχαία μια σφαίρα. Να γράψετε τον δειγματικό χώρο του πειράματος.

<u>Λύση:</u>

Στο παρακάτω δεντροδιάγραμμα φαίνεται ο δειγματικός χώρος του πειράματος.



Άρα είναι: Ω={αΠ, αΚ, αΜ, βΠ, βΜ}

3. Ρίχνουμε δύο κανονικά αμερόληπτα ζάρια και έστω τα γεγονότα:

Α={εμφανίζεται ακριβώς ένα εξάρι}

Β={το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι 10}

Γ={το ένα ζάρι φέρνει τουλάχιστον 5, ενώ το άλλο φέρνει άρτιο}

Να βρείτε τον δειγματικό χώρο του πειράματος και να εκφράσετε τα Α, Β, Γ ως υποσύνολά του.

<u>Λύση:</u>

Ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος φαίνεται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1ο \ 2ο	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Για τα γεγονότα Α, Β και Γ έχουμε:

Α={(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5)}

Β={(6,4), (5,5), (4,6)}

Γ={(5,2), (6,2), (5,4), (6,4), (5,6), (6,6), (2,5), (2,6), (4,5), (4,6), (6,5)}

ΘΕΩΡΙΑ

Ορισμός της Πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ένας δειγματικός χώρος που έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο $\{\omega_i\}$ αντιστοιχίζουμε έναν πραγματικό αριθμό που τον συμβολίζουμε με $P(\omega_i)$, έτσι ώστε να ισχύουν:

- $0 \leq P(\omega_i) \leq 1$
- $P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu)=1$

Ο αριθμός $P(\omega_i)$ ονομάζεται πιθανότητα του ενδεχομένου $\{\omega_i\}$.

Προσοχή: Ως πιθανότητα του αδύνατου ενδεχομένου $\varnothing$ ορίζεται ο αριθμός:

$$P(\varnothing)=0$$

→ Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι είναι $P(\Omega)=1$.

Κλασικός Ορισμός της Πιθανότητας

Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_\nu\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, ..., $\{\omega_\nu\}$ είναι ισοπίθανα, δηλαδή ισχύει ότι: $P(\omega_i)=P$ για κάθε $i\in\{1, 2, \ldots, \nu\}$ τότε έχουμε ότι:

$$P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P(\omega_1) + P(\omega_2) + \ldots + P(\omega_\nu)=1 \Leftrightarrow \nu P=1 \Leftrightarrow P=\frac{1}{\nu}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα το ενδεχόμενο $A=\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\mu\}$ του παραπάνω δειγματικού χώρου Ω, τότε έχουμε:

$$P(A)= P(\alpha_1)+ P(\alpha_2)+...+ P(\alpha_\mu) \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+...+\frac{1}{\nu} \Leftrightarrow P(A)=\frac{\mu}{\nu}$$

Επομένως: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}$

όπου $N(A)$: το πλήθος στοιχείων του A, $N(\Omega)$: το πλήθος στοιχείων του Ω.

<u>Κανόνες Λογισμού των Πιθανοτήτων</u>

Οι βασικές ιδιότητες του λογισμού των πιθανοτήτων είναι οι παρακάτω:

- Αν $A \cap B = \varnothing$ τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Για δύο αντίθετα ενδεχόμενα Α, Α΄ ισχύει ότι: $P(A') = 1 - P(A)$
- <u>Προσθετικός νόμος των πιθανοτήτων</u>

  Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι:

  $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$
- Για δύο ενδεχόμενα Α, Β ισχύει ότι:

  $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και τα ενδεχόμενα $A=\{\omega_1,\omega_2\}$ και $B=\{\omega_2,\omega_3\}$.

Αν $p(\mathrm{A})=\frac{3}{5}$ και $p(\mathrm{B})=\frac{1}{2}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες: $p(\omega_1)$, $p(\omega_2)$ και $p(\omega_3)$.

(Απ. $p(\omega_1)=\frac{1}{2}$, $p(\omega_2)=\frac{1}{10}$, $p(\omega_3)=\frac{2}{5}$)

2. Υποθέτουμε ότι Α, Β είναι τα ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν ότι:

$$p(\mathrm{A})=0.5,\ p(\mathrm{B})=0.4 \text{ και } p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0.8$$

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

I. να μην πραγματοποιηθεί το Α.

II. να πραγματοποιηθεί μόνο το Β.

III. να πραγματοποιηθούν και το Α και το Β.

IV. να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β.

(Απ. I. $p(\mathrm{A}')=0.5$, II. $p(\mathrm{B}-\mathrm{A})=0.3$, III. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0.1$, IV. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'=0.2$)

3. Έστω ότι Α, Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω και ισχύουν τα παρακάτω:

$$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{4}{5},\ p(\mathrm{B}')=\frac{1}{3}\ \text{και}\ p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{2}{5}$$

Να βρεθούν οι πιθανότητες: $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$, $p(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})$

(Απ. $p(\mathrm{A})=\frac{8}{15}$, $p(\mathrm{B})=\frac{2}{3}$, $p(\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})=\frac{4}{15}$)

4. Έστω Α, Β ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$p(\mathrm{A})=\frac{3}{4}\ \text{και}\ p(\mathrm{B})=\frac{1}{3}$$

Ι. Να εξετάσετε αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

ΙΙ. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\geq\frac{3}{4}$

(Απ. Ι. Όχι)

5. Δίνονται τα ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με:

$$p(\mathrm{A})=x,\ p(\mathrm{B}')=\frac{x}{x+1},\ p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{x}{x+1}\ \text{με}\ x\in(0,1)$$

Ι. Για $x=\frac{1}{2}$ να εξετάσετε αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

ΙΙ. Να βρείτε την πιθανότητα $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

ΙΙΙ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

(Απ. Ι. Όχι, ΙΙ. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{x^2+1}{x+1}, x\in(0,1)$, ΙΙΙ. $2\sqrt{2}-2$)

6. Η πιθανότητα να συμβεί ένα γεγονός Α είναι 0.4 ενώ η πιθανότητα να συμβεί το γεγονός Β είναι 0.5. Η πιθανότητα να συμβαίνουν μαζί τα Α, Β είναι 0.2. Ζητούνται τα παρακάτω:

I. Η πιθανότητα να συμβεί ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

II. Η πιθανότητα να μην συμβεί το Α.

III. Η πιθανότητα να συμβεί το Α και να μην συμβεί το Β.

IV. Η πιθανότητα να συμβεί ένα μόνο από τα Α, Β.

V. Η πιθανότητα να μην συμβεί κανένα από τα Α, Β.

(Απ. I. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=0.7$, II. $p(\mathrm{A}')=0.6$, III. $p(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0.2$,

IV. $p((\mathrm{A}-\mathrm{B})\cup(\mathrm{B}-\mathrm{A}))=0.5$, V. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})'=0.3$)

7. Η πιθανότητα να επιλεγεί ένας φοιτητής για την ομάδα μπάσκετ του πανεπιστημίου του είναι $\frac{1}{5}$ ενώ για την ομάδα χάντμπολ είναι $\frac{1}{6}$. Αν η πιθανότητα να εκλεγεί και στις δύο ομάδες είναι $\frac{1}{10}$ τότε να υπολογίσετε:

I. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλεγεί τουλάχιστον σε μια από τις δύο ομάδες.

II. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλεγεί μόνο στην ομάδα χάντμπολ.

III. Την πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλεγεί μόνο σε μια από τις δύο ομάδες.

(Απ. I. $\frac{4}{15}$, II. $\frac{1}{15}$, III. $\frac{1}{6}$)

8. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως δύο γεγονότα Α, Β είναι ίση με 0.125. Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί ούτε το Α ούτε το Β είναι ίση με 0.375. Αν τα γεγονότα Α, Β είναι ανεξάρτητα, να βρεθεί η πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα Α, Β.

Υπόδειξη: Δύο ενδεχόμενα Α, Β ονομάζονται ανεξάρτητα μεταξύ τους, όταν και μόνο όταν ισχύει: $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = p(\mathrm{A})p(\mathrm{B})$

(Απ. $p(\mathrm{A}) = 0.25, p(\mathrm{B}) = 0.5$ ή $p(\mathrm{A}) = 0.5, p(\mathrm{B}) = 0.25$)

9. Έστω ότι από μια τράπουλα (αποτελείται από 52 φύλλα) τραβάμε τυχαία ένα φύλλο.

Υποθέτουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: Το φύλλο είναι ΄κούπα΄.

Β: Το φύλλο είναι ΄Ρήγας΄.

Γ: Το φύλλο είναι κόκκινου χρώματος.

Ι. Να βρείτε την πιθανότητα των παραπάνω ενδεχομένων Α, Β, Γ.

ΙΙ. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων Α΄, Β΄, Γ΄.

ΙΙΙ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$.

(Απ. Ι. $p(\mathrm{A}) = 0.25$, $p(\mathrm{B}) = \frac{1}{13}$, $p(\Gamma) = \frac{1}{2}$, ΙΙ. $p(\mathrm{A}') = 0.75$, $p(\mathrm{B}') = \frac{12}{13}$, $p(\Gamma') = \frac{1}{2}$,

ΙΙΙ. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) = \frac{1}{52}$)

10. Έστω ότι ρίχνουμε δύο κανονικά ζάρια. Να βρεθούν οι πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: Εμφανίζεται ακριβώς ένα τριάρι.

Β: Το άθροισμα των ενδείξεων των ζαριών είναι 8.

Γ: Το ένα ζάρι φέρνει τουλάχιστον 4, ενώ το άλλο φέρνει άρτιο.

(Απ. $p(\mathrm{A})=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$, $p(\mathrm{B})=\frac{5}{36}$, $p(\Gamma)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$)

11. Τρία δοχεία Α, Β, Γ περιέχουν σφαιρίδια άσπρου και μαύρου χρώματος ως εξής:

Α: 2 άσπρα και 3 μαύρα.

Β: 4 άσπρα και 2 μαύρα.

Γ: 3 άσπρα και 5 μαύρα.

Βγάζουμε ένα σφαιρίδιο από κάθε κουτί. Να βρείτε την πιθανότητα:

Ι. Να πάρουμε τρία άσπρα σφαιρίδια.

ΙΙ. Να πάρουμε τουλάχιστον ένα μαύρο σφαιρίδιο.

(Απ. Ι. $\frac{1}{10}$, ΙΙ. $\frac{9}{10}$)

12. Έστω ότι ρίχνουμε ένα αμερόληπτο νόμισμα 2 φορές. Ποια είναι η πιθανότητα και στις δύο ρίψεις να εμφανιστεί η ίδια ένδειξη (Κ ή Γ);

(Απ. $\frac{1}{2}$)

13. Έστω δύο μαθητές Α και Β οι οποίοι λύνουν ένα πρόβλημα φυσικής. Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι 0.75 και η πιθανότητα να το λύσουν και οι δύο είναι 0.25. Αν η πιθανότητα να μην λύσει το πρόβλημα ο Α είναι ίση με $\frac{2}{3}$, τότε να βρείτε την πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Α ή μόνο ο Β.

(Απ. $\frac{1}{2}$)

14. Το τμήμα Γ_1 του $1^{ου}$ Γενικού Λυκείου Γλυφάδας αποτελείται από 40 αγόρια και 27 κορίτσια. Στο επίσημο διαγώνισμα χημείας του τετραμήνου έγραψαν άριστα τα $\frac{3}{5}$ των αγοριών και τα $\frac{4}{9}$ των κοριτσιών. Έστω ότι επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρείτε την πιθανότητα να είναι κορίτσι ή να έγραψε άριστα στο διαγώνισμα.

(Απ. $\frac{51}{67}$)

15. Έστω μία τάξη που αποτελείται από 30 μαθητές. Για τις ανάγκες μιας έρευνας της Εθνικής Στατιστικής Υπηρεσίας, οι μαθητές ρωτήθηκαν πόσα αδέλφια έχουν. Οι απαντήσεις τους φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Αριθμός μαθητών	3	11	8	4	3	1
Αριθμός αδελφών	0	1	2	3	4	5

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, να βρείτε την πιθανότητα η οικογένειά του να έχει δύο παιδιά.

(Απ. $\frac{11}{30}$)

16. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων και Α, Β είναι υποσύνολα του Ω. Αν $p(\mathrm{A}^{'}) \le 0.28$ και $p(\mathrm{B}^{'}) \le 0.71$ τότε να αποδείξετε ότι:

$$p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \ge 1.01 - p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$$

17. Σε έναν αγώνα η πιθανότητα να κερδίσει ο Νίκος είναι 0.3, η πιθανότητα να κερδίσει ο Γιώργος είναι 0.2 και η πιθανότητα να κερδίσει ο Δημήτρης είναι 0.4. Να βρείτε την πιθανότητα:

I. Να κερδίσει ο Νίκος ή ο Γιώργος.

II. Να μην κερδίσει ο Νίκος ή ο Δημήτρης.

(I. 0.5, II. 0.3)

18. Σε μια τάξη ενός δημοτικού σχολείου το 15% των μαθητών φοράνε γυαλιά μυωπίας, το 40% φοράνε σιδεράκια και το 10% φοράνε και γυαλιά και σιδεράκια. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μην φοράει ούτε γυαλιά ούτε σιδεράκια.

(Απ. 55%)

19. Έστω ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\frac{p(\mathrm{B})}{p(\mathrm{B}^{'})} = \frac{1}{4}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες $p(\mathrm{B})$ και $p(\mathrm{B}^{'})$.

(Απ. $p(\mathrm{B}) = 0.2$, $p(\mathrm{B}^{'}) = 0.8$)

20. Αν είναι γνωστό ότι:

$$0 < p(\mathrm{A}) < 1,$$

τότε να αποδείξετε ότι θα ισχύει η σχέση:

$$\frac{1}{p(\mathrm{A})} + \frac{1}{p(\mathrm{A}')} \geq 4.$$

21. Από 120 μαθητές ενός Λυκείου, 24 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 20 μαθητές συμμετέχουν στο διαγωνισμό της ένωσης Ελλήνων Φυσικών και 12 μαθητές συμμετέχουν και στους δύο διαγωνισμούς. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Ποια η πιθανότητα ο μαθητής:

Α. να συμμετέχει σ' έναν τουλάχιστον από τους δύο διαγωνισμούς;

Β. να συμμετέχει μόνο σ' έναν από τους δύο διαγωνισμούς;

Γ. να μην συμμετέχει σε κανέναν από τους δύο διαγωνισμούς;

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2000)

(Απ. Α. $\frac{4}{15}$, Β. $\frac{1}{6}$, Γ. $\frac{11}{15}$)

22. Σε μια τεχνική εταιρεία εργάζονται συνολικά 100 υπάλληλοι ως μηχανικοί ή τεχνικό προσωπικό. Από αυτούς οι 60 είναι άνδρες, 40 άτομα είναι μηχανικοί, ενώ 10 γυναίκες ανήκουν στο τεχνικό προσωπικό. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο που εργάζεται στην εταιρεία. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Α: το άτομο είναι άνδρας που ανήκει στο τεχνικό προσωπικό.

Β: το άτομο είναι άνδρας ή είναι μηχανικός.

(Απ. $p(\mathrm{A}) = 0.5$, $p(\mathrm{B}) = 0.9$)

23. Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ’ ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μια σφαίρα. Έστω Α το ενδεχόμενο ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος και Β το ενδεχόμενο ο αριθμός αυτός να είναι πολλαπλάσιο του 5. Αν Α΄, Β΄ είναι τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα των Α και Β αντιστοίχως, να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

Α. $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$

Β. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

Γ. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')$

Δ. $p((\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'))$

(Επαναληπτικές Εξετάσεις 2003)

(Απ. Α. $p(\mathrm{A})=\dfrac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\dfrac{1}{5}$, Β. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\dfrac{3}{5}$, Γ. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')=\dfrac{27}{30}$,

Δ. $p((\mathrm{A}'\cap\mathrm{B})\cup(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}'))=\dfrac{1}{2}$)

24. Ένα κουτί περιέχει 40 κόκκινες κάρτες και άγνωστο πλήθος από κίτρινες και πράσινες κάρτες.

Αν η πιθανότητα να επιλεγεί τυχαία μια κίτρινη κάρτα είναι 0.25 και μια πράσινη κάρτα 0.35 τότε να βρείτε:

Α. το πλήθος όλων των καρτών που περιέχει το κουτί.

Β. τον αριθμό των κίτρινων και πράσινων καρτών που υπάρχουν στο κουτί.

(Απ. Α. 100 , Β. 25 κίτρινες, 35 πράσινες)

25. Σε ένα συνέδριο ιατρικής συμμετέχουν Γερμανοί, Γάλλοι και Άγγλοι ιατροί. Από τους σύνεδρους επιλέγεται τυχαία ένας για τη θέση του γραμματέα του συνεδρίου. Αν στο συνέδριο συμμετέχουν 25 Γερμανοί, ενώ οι πιθανότητες να επιλεγεί Γάλλος είναι 1/3 και Άγγλος είναι 0.25, τότε να βρεθεί το πλήθος των συνέδρων.

(Απ. 60 σύνεδροι)

26. Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία ένα καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

Α. γυναίκα ή φιλόλογος

Β. γυναίκα και όχι φιλόλογος

Γ. άνδρας και φιλόλογος

Δ. άνδρας ή φιλόλογος.

(Πανελλαδικές Εξετάσεις 2003)

(Απ. Α. 65%, Β. 25%, Γ. 10%, Δ. 75%)

27. Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, τότε να αποδείξετε ότι:

Αν $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ τότε $p(\mathrm{B}-\mathrm{A}) = p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A})$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο αρχικά υπολογίστε την πιθανότητα $p[(\mathrm{B}-\mathrm{A}) \cup \mathrm{A}]$ λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει: $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$.

28. Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$$\alpha x^2 + 4x + \gamma = 0$$

Αν α, γ είναι το αποτέλεσμα της ρίψης δύο ζαριών, τότε να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α. Η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Β. Η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα.

Γ. Η εξίσωση να έχει δύο μιγαδικές ρίζες.

Δ. Η εξίσωση να έχει μια πραγματική και μια μιγαδική ρίζα.

(Απ. Α. $\frac{5}{36}$, Β. $\frac{1}{12}$, Γ. $\frac{7}{9}$, Δ. 0)

29. Έστω Ω={x, y, ω, z} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος.

Α. Να βρείτε το p(y), αν είναι γνωστό ότι: p(x)=$\frac{1}{2}$, p(ω)=$\frac{1}{4}$, p(z)=$\frac{1}{15}$.

Β. Να βρείτε τα p(x) και p(y), αν είναι γνωστό ότι: p(ω)=p(z)=$\frac{1}{6}$ και

p(x)= 3p(y).

(Απ. Α. $\frac{11}{60}$, Β. p(x)=$\frac{1}{2}$, p(y)=$\frac{1}{6}$)

30. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, με:

$$p(\mathrm{A})=\frac{3}{10} \quad \text{και} \quad p(\mathrm{B})=4p(\mathrm{B}')$$

Α. Να βρείτε την πιθανότητα $p(\mathrm{B})$.

Β. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

Γ. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{10}\le p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\le\frac{3}{10}$.

Δ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες:

$p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$, $p(\mathrm{A}-\mathrm{B})$ και $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')$.

(Απ. Α. $p(\mathrm{B})=\frac{4}{5}$, Β. Τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα, Δ. $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{9}{10}$, $p(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{1}{10}$, $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}')=\frac{2}{5}$)

31. Έστω τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου με $p(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$ και $p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{5}{12}$.

Α. Να υπολογίσετε την πιθανότητα της τομής, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, των ενδεχομένων A και B.

Β. Είναι τα ενδεχόμενα A και B ασυμβίβαστα;

Γ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο το A.

(Απ. Α. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{6}$, Β. Τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα, Γ. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}')=p(\mathrm{A}-\mathrm{B})=\frac{1}{6}$)

32. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $p(\mathrm{A})=\frac{2}{5}$ και $p(\mathrm{B})=\frac{5}{8}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{40}\leq p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})\leq\frac{2}{5}$.

33. Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $p(\mathrm{A})=\frac{1}{3}$ και $p(\mathrm{B})=\frac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι: $\frac{3}{8}\leq p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\leq\frac{17}{24}$.

34. Έστω Α και Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει:

$$p(\mathrm{A})=2p(\mathrm{B})=4p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \quad \text{και} \quad p(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})=\frac{5}{8}$$

Να βρείτε τις πιθανότητες:

Α. $p(\mathrm{A})$, $p(\mathrm{B})$ και $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

Β. $p(\mathrm{B}-\mathrm{A})$

Γ. $p(\mathrm{B}\cup\mathrm{A}')$

(Απ. Α. $p(\mathrm{A})=\frac{1}{2}$, $p(\mathrm{B})=\frac{1}{4}$, $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\frac{1}{8}$, Β. $p(\mathrm{B}-\mathrm{A})=\frac{1}{8}$, Γ. $p(\mathrm{B}\cup\mathrm{A}')=\frac{5}{8}$)

35. Αν Α και Β είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $p(\mathrm{A})=\lambda^2$ και $p(\mathrm{B})=7\lambda^2-6\lambda+2$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{4}\leq\lambda\leq\frac{1}{2}$.

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄</u>

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στη σελ. 31)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ασυμβίβαστα, όταν ισχύει ότι: $A \cap B' = \varnothing$.

Β. Τα ενδεχόμενα $A \cap B'$ και $B \cap A'$ είναι ασυμβίβαστα.

Γ. Τα ενδεχόμενα A και A' είναι ασυμβίβαστα.

Δ. Τα B και B' δεν είναι ασυμβίβαστα.

2. Έστω Α και Β δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. $A \cup B = \Omega$.

Β. $A \cap B = \varnothing$.

Γ. $A - B = A$.

Δ. Τα A' και B' είναι ασυμβίβαστα.

3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Αν ισχύει ότι $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, τότε $p(\mathrm{A}) \le p(\mathrm{B})$.

Β. Αν ισχύει ότι $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, τότε $p(\mathrm{A}') \ge p(\mathrm{B}')$.

Γ. Αν ισχύει ότι $p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = 1$, τότε τα ενδεχόμενα Α και Β είναι πάντοτε συμπληρωματικά.

Δ. Αν $p(\mathrm{A}) \ne p(\mathrm{B})$, τότε είναι πάντοτε $\mathrm{A} \ne \mathrm{B}$.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Αν ισχύει ότι $\mathrm{A} \ne \mathrm{B}$, τότε είναι πάντοτε $p(\mathrm{A}) \ne p(\mathrm{B})$.

Β. Αν το ενδεχόμενο A' πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A.

Γ. Το ενδεχόμενο $\mathrm{A}' \cap \mathrm{B}$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A και δεν πραγματοποιείται το B.

Δ. Αν $\mathrm{A}' \cup \mathrm{B}' \ne \Omega$, τότε τα ενδεχόμενα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.

5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει ότι: $p(\mathrm{A}) - p(\mathrm{A}') = 1$.

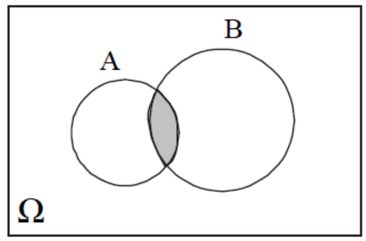
Β. Με $\mathrm{N}(\mathrm{A})$ συμβολίζουμε όλα τα δυνατά υποσύνολα ενός ενδεχομένου Α.

Γ. Τα ενδεχόμενα Α=$\{1, 4, 7\}$ και Β=$\{4, 7, 11\}$ είναι ξένα μεταξύ τους.

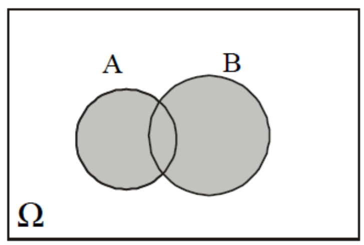
Δ. Αν το ενδεχόμενο Γ=$\{2, 4, 6\}$, τότε $\mathrm{N}(\Gamma) = 3$.

6. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

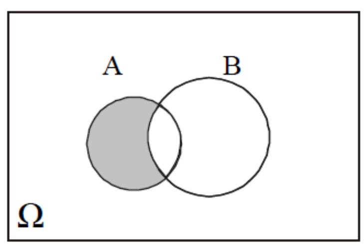
Α. Στο παρακάτω σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο $A \cup B$.



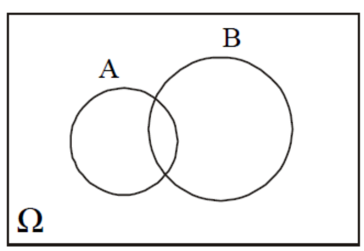
Β. Στο παρακάτω σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο $A \cup B$.



Γ. Στο παρακάτω σχήμα το γραμμοσκιασμένο χωρίο απεικονίζει το ενδεχόμενο $B - A$.



Δ. Στο παρακάτω σχήμα τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.



7. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από δύο ενδεχόμενα, είναι συμπληρωματική της πιθανότητας να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από αυτά.

Β. Αν η πιθανότητα να μη συμβεί ένα ενδεχόμενο είναι ίση με την πιθανότητα να συμβεί, τότε η πιθανότητα να συμβεί ισούται με $\frac{1}{2}$.

Γ. Η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ακριβώς από δύο ενδεχόμενα είναι μικρότερη ή ίση από την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα δύο ενδεχόμενα.

Δ. Σε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα, δεν ισχύει ο προσθετικός νόμος.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Δύο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα αν η τομή τους είναι το κενό σύνολο.

Β. Δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα είναι και ασυμβίβαστα.

Γ. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα Α ή Β ισούται με 1, τότε τα ενδεχόμενα Α και Β είναι συμπληρωματικά.

Δ. Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται $p(A)=0.5$, $p(B)=0.4$ και $p(A\cap B)=0.2$, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα Α και Β είναι $\frac{7}{10}$.

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

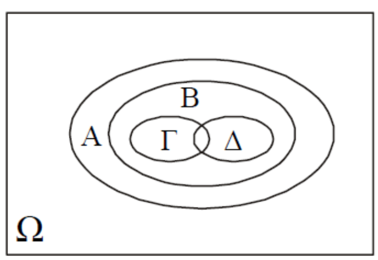
Α. Τα ενδεχόμενα είναι σύνολα, ενώ οι πιθανότητες είναι μη αρνητικοί αριθμοί.

Β. Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται p(A)=0.5, p(B)=0.4 και $p(A\cap B)=0.2$, τότε η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α και Β είναι $\frac{3}{5}$.

Γ. Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται p(A)=0.5, p(B)=0.4 και $p(A\cap B)=0.2$, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το Α είναι $\frac{3}{10}$.

Δ. Αν για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω δίνονται p(A)=0.5, p(B)=0.4 και $p(A\cap B)=0.2$, τότε η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α και Β είναι $\frac{1}{2}$.

10. Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα του Venn. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες σχέσεις:



Α. $\Gamma\cup\Delta\subseteq A$

Β. $B\cup\Gamma=B$

Γ. $A\cup B=B$

Δ. $(\Gamma\cap B)\cap A=\Gamma$

<u>ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ</u>

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄ (Α-Β-Γ-Δ)
1. Λ-Σ-Σ-Λ
2. Λ-Σ-Σ-Λ
3. Σ-Σ-Λ-Σ
4. Λ-Σ-Λ-Σ
5. Λ-Λ-Λ-Σ
6. Λ-Σ-Λ-Λ
7. Σ-Σ-Σ-Λ
8. Σ-Σ-Λ-Σ
9. Σ-Λ-Σ-Σ
10. Σ-Σ-Λ-Σ

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ

Πράξεις και Ιδιότητες των Πραγματικών Αριθμών

Ιδιότητα	Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός
Αντιμεταθετική	$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\beta=\beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$	$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο Στοιχείο	$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$
Αντίθετος/Αντίστροφος Αριθμού	$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1,\ \ \alpha\neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$	

$$(\alpha=\beta \ \ \text{και} \ \ \gamma=\delta)\Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\delta$$

$$(\alpha=\beta \ \ \text{και} \ \ \gamma=\delta)\Rightarrow \alpha\gamma=\beta\delta$$

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$$

Αν $\gamma\neq 0$, τότε:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma$$

$$\alpha\cdot\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=0 \ \ \text{ή} \ \ \beta=0$$

Δυνάμεις

Αν ο α είναι πραγματικός αριθμός και ο ν φυσικός ορίζουμε ότι:

$$\alpha^{\nu}=\alpha\cdot \alpha\cdot \alpha\cdot \ldots \cdot\alpha \qquad \text{για } \nu>1$$

και

$$\alpha^{1}=\alpha$$

Αν επιπλέον είναι $\alpha\neq 0$ τότε έχουμε ότι:

$$\alpha^{0}=1 \quad \text{και} \quad \alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}$$

→ Αν $\alpha=\beta \Rightarrow \alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$ (Προσοχή: Δεν ισχύει το αντίστροφο)

Ιδιότητες Δυνάμεων

$$\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa+\lambda} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\alpha^{\lambda}}=\alpha^{\kappa-\lambda}$$

$$\alpha^{\kappa}\cdot\beta^{\kappa}=(\alpha\beta)^{\kappa} \qquad \frac{\alpha^{\kappa}}{\beta^{\kappa}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\kappa}$$

$$\left(\alpha^{\kappa}\right)^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$$

Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$$

$$(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$$

$$\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$$

$$(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$$

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογίσετε τα γινόμενα που ακολουθούν:

Α. $(-4)^{60} \cdot (-1.25)^{40}$

Β. $12^{100} \cdot 6^{-149} \cdot 1.5^{50}$

Γ. $(-0.25)^{17} \cdot 8^{11}$

(Απ. Α. 10^{40}, Β. 6, Γ. $-\frac{1}{2}$)

2. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

Α. $\frac{8x^5y^{-4}}{2x^{-4}y}$

Β. $\frac{3x^2y^{-1}-4x^{-3}y}{x^{-2}y}$

Γ. $\frac{8x^2y^{-1}+4x^{-3}y+12x^{-4}y^{-6}}{4x^{-5}y^3}$

(Απ. Α. $\frac{4x^9}{y^5}$, Β. $\frac{3x^4}{y^2}-\frac{4}{x}$, Γ. $\frac{2x^7}{y^4}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{3x}{y^9}$)

3. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $3(\alpha+\beta)^2-3(\alpha-\beta)^2=12\alpha\beta$

Β. $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

Α. $101^2 - 99^2$

Β. $\frac{5.25^2 - 3.25^2}{8.5}$

Γ. $10001^2 - 9999^2$

Δ. $\frac{123.708}{67.354^2 - 56.354^2}$

(Απ. Α. 400, Β. 2, Γ. $4 \cdot 10^4$, Δ. $\frac{1}{11}$)

5. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $(\alpha+\beta)^2 + (\alpha+\beta)(\alpha-\beta) - 2\alpha^2 = 2\alpha\beta$

Β. $5\alpha^2 - 5(\alpha+1)(\alpha-1) = 5$

Γ. $(\alpha+1)^2 - (\alpha-1)(\alpha+1) = 2(\alpha+1)$

Δ. $(\alpha^2+\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = [(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)]^2$

Ε. $(\alpha-3\beta)^2 - (\beta-3\alpha)^2 = 8(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$

ΣΤ. $\frac{(\alpha+3)^2 + (\alpha-3)^2}{2} = 18 + (\alpha+3)(\alpha-3)$

6. Αν $\alpha+\beta=1$, να αποδείξετε ότι:

$$\beta^3(\alpha+1) - \alpha^3(\beta+1) = \beta - \alpha$$

7. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\dfrac{5(x^2-4)}{3(x-2)}$

Β. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Γ. $\dfrac{8(x^2-9)}{3(x-3)-4x+12}$

Δ. $\dfrac{(x+1)^2-4x}{2(x-1)}$

Ε. $\dfrac{4x^2-5x+1}{x-1}$

ΣΤ. $\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{121}(x-2)}$

(Απ. Α. $\dfrac{5}{3}(x+2)$, Β. $\dfrac{x-2}{x+2}$, Γ. $-8(x+3)$, Δ. $\dfrac{x-1}{2}$, Ε. $4x-1$, ΣΤ. $\dfrac{2x+3}{11}$)

8. Αν υποθέσουμε ότι ο ν είναι φυσικός αριθμός τότε να δείξετε ότι ο αριθμός:

$$2^{\nu}+2^{\nu+2}+2^{\nu+3}$$

είναι πολλαπλάσιο του 13.

9. Αν $\alpha^2+\beta^2=2$, να αποδείξετε ότι:

$$(\beta-2\alpha)^2+(2\beta+\alpha)^2=10$$

10. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2-1}\cdot\dfrac{(\alpha-1)^2}{\alpha^3-1}$

Β. $\dfrac{\alpha^3+\alpha^2+\alpha}{\alpha^3-1}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2+\alpha}$

Γ. $\dfrac{\alpha-1}{\alpha}\cdot\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha^2-1}\cdot\dfrac{\alpha^2}{\alpha+1}$

Δ. $\dfrac{\alpha^4}{5(\alpha+1)^3}\cdot\dfrac{\alpha^2-1}{\alpha^2}\cdot\dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha-1}$

Ε. $\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}\cdot\dfrac{\alpha^4+\alpha^2}{\alpha^2+1}\cdot\dfrac{3\alpha^2+3\alpha}{\alpha^2-1}$

(Απ. Α. $\dfrac{1}{\alpha^2+\alpha+1}$, Β. 1, Γ. α, Δ. $\dfrac{\alpha^2}{5}$, Ε. 3α)

11. Α. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$$

Β. Αν $x-\dfrac{1}{x}=4$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

(Απ. Β. $\mathrm{A}=18$)

12. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\frac{x^{-2}}{y^2}\cdot\frac{y^3}{x^3}\cdot\frac{y^5}{x^{-3}}$

Β. $(x-y)^2\cdot(x^{-1}-y^{-1})^{-2}$

Γ. $\frac{(x-1)^2}{xy^{-2}}\cdot\frac{y^{-1}}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{y}$

Δ. $\frac{y^{-5}}{\omega y^2x^6}\cdot\frac{\omega^{-2}}{y^{-4}}\cdot\frac{x^{-3}}{\omega^{-3}}$

(Απ. Α. $\frac{y^6}{x^2}$, Β. x^2y^2, Γ. $1-\frac{1}{x}$, Δ. $\frac{1}{x^9y^3}$)

13. Να αποδείξετε την σχέση που ακολουθεί:

$$\left(\alpha-\frac{\beta^2}{\beta-\alpha}\right):\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2-\beta^2}\right)=1$$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο χρησιμοποιήστε την ταυτότητα:

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

14. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω παραστάσεων, όταν:

$$\alpha=\frac{1}{4} \text{ και } \beta=-\frac{1}{2}$$

Α. $\mathrm{A}=-3(1-2\alpha)-2(3\beta+2)-2(-\alpha-2\beta)$

Β. $\mathrm{B}=-5(-2\alpha-3\beta)-6(2\beta-\alpha)-3\beta$

(Απ. Α. -4, Β. 4)

15. Αν για τους αριθμούς α, β ισχύει ότι: $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{3}{5}$ τότε να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

Α. $\dfrac{2\beta + 3\alpha}{\beta}$

Β. $-\dfrac{\beta}{2\beta - \alpha}$

Γ. $\dfrac{6\alpha + 4\beta}{4\alpha - 2\beta}$

<u>Σημείωση:</u> Σε κάθε περίπτωση οι παρονομαστές είναι διάφοροι του μηδενός.

(Απ. Α. 7, Β. -3, Γ. 3)

16. Αν οι αριθμοί α και $\dfrac{1}{\beta}$ είναι αντίθετοι, τότε:

Α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και $-\beta$ είναι αντίστροφοι.

Β. Να υπολογίσετε την παράσταση: $\mathrm{A} = -2\alpha\beta + 6$.

(Απ. Β. 8)

17. Να απλοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

$$\frac{x^2 + y^2 - z^2 + 2xy}{x^2 + z^2 - y^2 + 2xz}$$

(Απ. $\dfrac{x + y - z}{x + z - y}$)

18. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $(x+2)^3-6(x+1)^2=x^3+2$

Β. $\dfrac{(x-3)^2+(x+3)^2}{2}=x^2+9$

Γ. $\dfrac{(y-3x)^2-(x-3y)^2}{8}=(x+y)(x-y)$

Δ. $(x+y)^3-x(x-3y)^2=y(y-3x)^2$

19. Αν ισχύει ότι $\kappa^2+\lambda^2=4$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(2\kappa-\lambda)^2+(\kappa+2\lambda)^2=20$$

20. Αν ισχύει ότι $\kappa+\dfrac{1}{\kappa}=2$, τότε να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

Α. $\mathrm{A}=\kappa^2+\dfrac{1}{\kappa^2}$

Β. $\mathrm{B}=\kappa^3+\dfrac{1}{\kappa^3}$

(Απ. Α. 2, Β. 2)

21. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\kappa,\lambda\neq 0$ ισχύει ότι: $\dfrac{(\kappa^2+\lambda^2)^3}{(\kappa^3+\lambda^3)^2}=1$,

τότε να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\kappa\lambda}{\kappa^2+\lambda^2}=\dfrac{3}{2}$.

22. Αν ισχύει ότι: $(\kappa-\lambda)^2-(\kappa+\lambda)^2=0$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=(\kappa\lambda-1)^{2014}$.

(Απ. $\mathrm{A}=1$)

23. Αν $\alpha-\beta\neq 0$, τότε:

Α. Να αποδείξετε την ισότητα: $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}-\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$.

Β. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\mathrm{A}=\dfrac{2016^3+2014^3}{4030}-2014\cdot 2016$.

(Απ. Β. $\mathrm{A}=4$)

24. Αν ισχύει ότι $x+y+z=2$ και $3xz+1=0$, τότε να βρείτε την τιμή της παράστασης: $\Pi=x^3+z^3+(y-2)^3-3xyz$.

(Απ. $\Pi=2$)

25. Έστω οι αριθμοί:

$$\rho_1=\alpha^{\nu+4}\beta\gamma^{\kappa-1} \quad \text{και} \quad \rho_2=-\alpha^{\nu}\beta^{2\mu}\gamma^{\kappa+1} \quad \text{με} \quad \alpha,\beta,\gamma\neq 0.$$

Αν ισχύει ότι $\rho_1\rho_2>0$, τότε να βρείτε το πρόσημο του β.

(Απ. $\beta<0$)

ΘΕΩΡΙΑ

Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός: Ένας αριθμός α λέμε ότι είναι μεγαλύτερος από έναν αριθμό β και γράφουμε **α > β,** όταν η διαφορά **α – β** είναι θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση αυτή λέμε αντίστοιχα ότι ο αριθμός β είναι μικρότερος από τον αριθμό α και γράφουμε **β < α**.

Εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του μηδενός.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος του μηδενός.

Προσοχή: Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι α > β ή α=β τότε έχουμε ότι:

$$\boldsymbol{\alpha \geq \beta}$$

(α μεγαλύτερος ή ίσος του β)

Εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω:

$$\left(\alpha>0 \;\; \text{και} \;\; \beta>0\right) \Rightarrow \alpha+\beta>0$$
$$\left(\alpha<0 \;\; \text{και} \;\; \beta<0\right) \Rightarrow \alpha+\beta<0$$

$$\alpha,\ \beta \text{ ομόσημοι} \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}>0$$
$$\alpha,\ \beta \text{ ετερόσημοι} \Leftrightarrow \alpha\cdot\beta<0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta}<0$$

$$\alpha^2 \geq 0, \quad \text{για κάθε } \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\left(\text{Η ισότητα ισχύει μόνο όταν } \alpha=0\right)$$

Ιδιότητες των ανισοτήτων:

$$(\alpha > \beta \ \ \text{και} \ \ \beta > \gamma) \Rightarrow \alpha > \gamma$$

- $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$
- Αν $\gamma > 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$
- Αν $\gamma < 0$, τότε: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$

- $(\alpha > \beta \ \ \text{και} \ \ \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$
- Για **θετικούς** αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ισχύει η συνεπαγωγή:
  $(\alpha > \beta \ \ \text{και} \ \ \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$$

<u>Διαστήματα:</u>

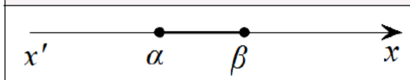
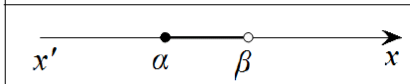
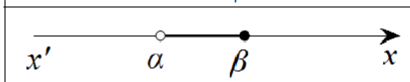
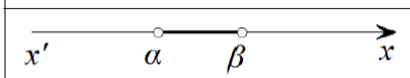
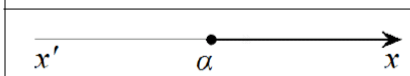
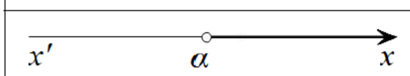
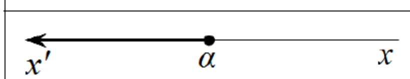
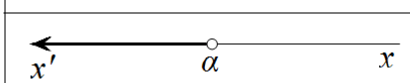
Το σύνολο των πραγματικών αριθμών x για τους οποίους ισχύει ότι: **α ≤ x ≤ β** ονομάζεται κλειστό διάστημα από α μέχρι β και συμβολίζεται με: **[α, β]**.

→ Αν από το κλειστό διάστημα **[α, β]** παραλείψουμε τα α και β τότε προκύπτει το αντίστοιχο ανοικτό διάστημα από το α μέχρι το β που συμβολίζεται με: **(α, β)**.

Άλλες μορφές διαστημάτων

- Ανοικτό δεξιά διάστημα: **[α, β) → α ≤ x < β**
- Ανοικτό αριστερά διάστημα: **(α, β] → α < x ≤ β**
- [α, +∞) → **α ≤ x** **(** +∞ : Συν άπειρο)
- (−∞, α] → **x ≤ α** **(** −∞ : Πλην άπειρο)

<u>Μορφές Διαστημάτων Πραγματικών Αριθμών</u>

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	*ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ*	*ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ*
	$\alpha \le x \le \beta$	$[\alpha,\ \beta]$
	$\alpha \le x < \beta$	$[\alpha,\ \beta)$
	$\alpha < x \le \beta$	$(\alpha,\ \beta]$
	$\alpha < x < \beta$	$(\alpha,\ \beta)$
	$x \ge \alpha$	$[\alpha,\ +\infty)$
	$x > \alpha$	$(\alpha,\ +\infty)$
	$x \le \alpha$	$(-\infty,\ \alpha]$
	$x < \alpha$	$(-\infty,\ \alpha)$

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω σχέσεις:

Α. $\alpha^2 + 16 \geq 8\alpha$

Β. $(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \geq 0$

Γ. $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha - 1$

Δ. $2\alpha^2 + 2\beta^2 - (\alpha+\beta)^2 \geq 0$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y αν ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$$

(Απ. $x = 2, y = -3$)

3. Αν γνωρίζετε ότι είναι:

$$x < 1 < y$$

τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$1+xy < x+y$$

4. Να αποδείξετε ότι:

Α. $\beta(2\alpha - \beta) \leq \alpha(\alpha + 4\beta)$

Β. $(\alpha+1)^2 - 8 \leq 2(\alpha-1)^2$

Γ. $(\alpha-\beta)^2 \geq 4(\alpha\beta - 2\beta^2)$

5. Α. Να αποδείξετε την παρακάτω σχέση:

$$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha-4\beta-5$$

Β. Πότε ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση;

(Απ. Β. $\alpha=1, \beta=-2$)

6. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ που ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\kappa^2+\lambda^2+\mu^2=4\kappa+6\lambda+8\mu-29$$

(Απ. $\kappa=2, \lambda=3, \mu=4$)

7. Αν ισχύει ότι $\kappa+\lambda=2$, τότε να αποδείξετε ότι:

Α. $\kappa\lambda \leq 1$

Β. $\kappa^2+\lambda^2-2 \geq 0$

8. Αν ισχύει ότι $x-4<0$, τότε να αποδείξετε ότι:

Α. $x-2>\dfrac{3x-8}{2}$

Β. $\dfrac{x-3}{2}>\dfrac{2x-9}{6}+\dfrac{x-2}{3}$

9. Αν ισχύει ότι $x<2<y$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$2x+2y>xy+4$$

10. Αν ισχύει ότι $x \in [1,3]$ και $y \in [-4,-2]$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

Α. $2x+3y$

Β. $x-y$

Γ. $\frac{x}{y}$

(Απ. Α. $[-10,0]$, Β. $[3,7]$, Γ. $\left[-\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right]$)

11. Αν ισχύει ότι $2<\alpha<3$ και $6<\beta<8$, τότε να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

Α. $\beta-\alpha$

Β. $\frac{\beta}{\alpha}-1$

Γ. $\alpha^2-3\beta$

(Απ. Α. $(3,6)$, Β. $(1,3)$, Γ. $(-20,-9)$)

12. Αν ισχύει ότι $0<\lambda<\kappa$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\frac{4}{\kappa+\lambda} \le \frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}$$

13. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma \le \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

ΘΕΩΡΙΑ

Απόλυτη Τιμή Πραγματικού Αριθμού

Ορισμός

Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με $|\boldsymbol{\alpha}|$ και ορίζεται από τον τύπο:

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

Εύκολα προκύπτουν τα παρακάτω:

- $|\alpha| = |-\alpha| \geq 0$
- $|\alpha| \geq \alpha$ και $|\alpha| \geq -\alpha$
- $|\alpha|^2 = \alpha^2$

Αν $\theta > 0$, τότε:

- $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$
- $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών

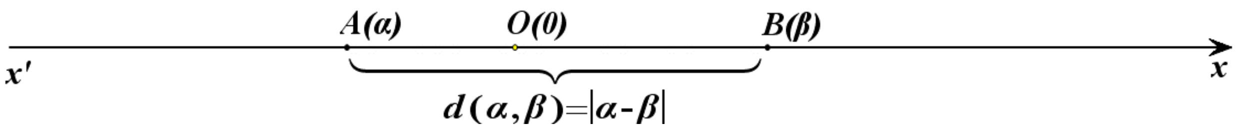
1. $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

2. $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$

3. $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

<u>Απόσταση δύο αριθμών</u>

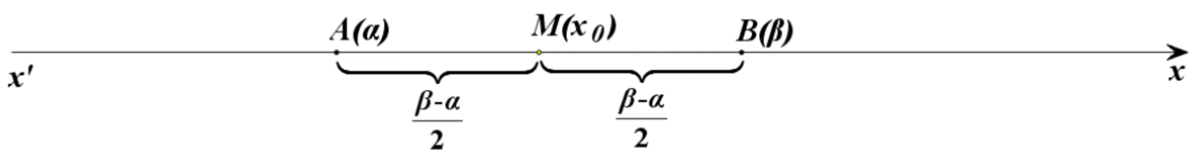
Έστω δύο αριθμοί α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα x΄x με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.



Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται <u>απόσταση των αριθμών α και β</u>, συμβολίζεται με $d(\alpha,\beta)$ και είναι ίση με $|\alpha-\beta|$. Ισχύει δηλαδή ότι:

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$$

Έστω ένα διάστημα [α, β] και Α και Β τα σημεία πάνω στον άξονα x΄x τα οποία παριστάνουν τα άκρα α και β αντίστοιχα.



Αν $M(x_o)$ το μέσο του τμήματος ΑΒ, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$x_o=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

→ Ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ ονομάζεται <u>κέντρο του διαστήματος ΑΒ</u>.

→ Ο αριθμός $\rho=\frac{\beta-\alpha}{2}$ ονομάζεται <u>ακτίνα του διαστήματος ΑΒ.</u>

Από τον ορισμό της απόστασης προκύπτουν τα παρακάτω:

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$\left|x - x_0\right| < \rho \Leftrightarrow x \in \left(x_0 - \rho,\ x_0 + \rho\right)$$

$$\Leftrightarrow x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$$

Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$, ισχύει:

$$\left|x - x_0\right| > \rho \Leftrightarrow x \in \left(-\infty,\ x_0 - \rho\right) \cup \left(x_0 + \rho,\ +\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow x < x_0 - \rho \ \text{ ή } \ x > x_0 + \rho$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει ο x, αν:

Α. $|x| = 3$

Β. $|x-4| = 6$

Γ. $|x+5| = 3$

(Απ. Α. $x = \pm 3$, Β. $x = 10$ ή $x = -2$, Γ. $x = -2$ ή $x = -8$)

2. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

Α. $|\pi - 5|$

Β. $|\pi - 4| + |\pi - 3| + |5 - \pi|$

Γ. $|2^3 - 2^4| - |2^4 - 2^3|$

(Απ. Α. $5-\pi$, Β. $6-\pi$, Γ. 0)

3. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει: $2 < x < 3$

τότε να γράψετε χωρίς την απόλυτη τιμή τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $|x-2| + |x-3|$

Β. $|3-x| - |x-2| + 2|x-3|$

Γ. $2|2-x| - |x-3| + |9-3x|$

(Απ. Α. 1, Β. $11-4x$, Γ. 2)

4. Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$$|x-5|-|7-x|$$

όταν είναι γνωστό ότι: Α. $x<5$, Β. $x>7$.

(Απ. Α. -2, Β. 2)

5. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις που ακολουθούν:

$\mathrm{A}=2-|x+2|$

$\mathrm{B}=3+|x-3|$

(Απ. Αν $x>-2$ τότε: $\mathrm{A}=-x$, αν $x<-2$ τότε: $\mathrm{A}=x+4$, αν $x=-2$ τότε: $\mathrm{A}=2$, αντίστοιχα έχουμε ότι: Αν $x>3$ τότε: $\mathrm{B}=x$, αν $x<3$ τότε: $\mathrm{B}=6-x$, αν $x=3$ τότε: $\mathrm{B}=3$)

6. Να δείξετε ότι ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\left(\frac{x}{|x|}-1\right)(|x|+x)=0$$

<u>Υπόδειξη:</u> Για να αποδείξετε το ζητούμενο να κάνετε πράξεις και να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα: $|x|^2=x^2$.

7. Αν $\alpha > \beta$, τότε να δείξετε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Α. $\dfrac{|\beta-\alpha|+2(\alpha+2\beta)}{3}=\alpha+\beta$

Β. $\dfrac{|\beta-\alpha|-|\alpha-\beta|}{2}=0$

Γ. $\dfrac{|\alpha-\beta|-\alpha}{|\beta-\alpha|+\beta}=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Δ. $\dfrac{3|\beta-\alpha|+2|\alpha-\beta|}{|\beta-\alpha|}=5$

Ε. $\dfrac{|\alpha-\beta|+|\beta-\alpha|}{|\beta-\alpha|+|\beta-\alpha|}=1$

8. Έστω ότι ισχύει: $\alpha > \beta > 0$.

Να διατάξετε από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

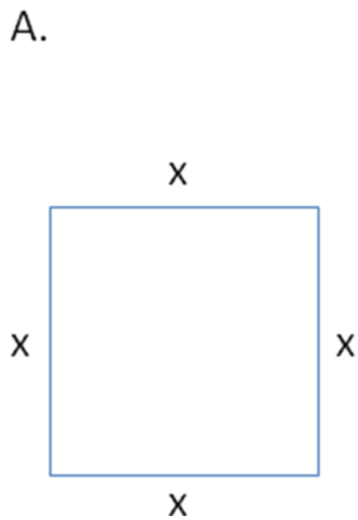
$$1,\ \frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\beta}{\alpha}$$

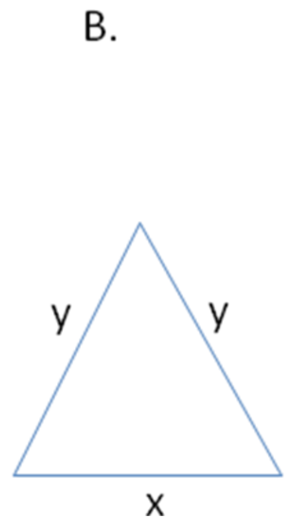
(Απ. $\dfrac{\beta}{\alpha}<1<\dfrac{\alpha}{\beta}$)

9. Α. Αν ισχύει ότι $|\alpha+5|=|\alpha|+5$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \geq 0$.

Β. Αν ισχύει ότι $|\alpha+3|=\big||\alpha|-3\big|$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha \leq 0$.

10. Αν είναι γνωστό ότι: $|x-3|<0.3$ και $|y-5|<0.4$, τότε να εκτιμήσετε την τιμή της περιμέτρου των παρακάτω γεωμετρικών σχημάτων.





(Απ. Α. $10.8<4x<13.2$, Β. $11.9<x+2y<14.1$)

11. Αν ισχύει ότι $x<2<y$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$|2x-2y-3|+|y-x+1|=1+3|y-x+1|$$

12. Αν ισχύει ότι $|x|^3-x^2\leq 1-|x|$, τότε να βρείτε σε ποιο διάστημα ανήκουν οι τιμές του x.

(Απ. $x\in[-1,1]$)

13. Αν ισχύει ότι $|x|\leq ||x|-6|-2$, τότε να βρείτε σε ποιο διάστημα ανήκουν οι τιμές του x.

(Απ. $x\in[-2,2]$)

14. Αν ισχύει ότι $d(2x-1,3)=d(4x,x+1)$, τότε να αποδείξετε ότι η απόσταση του x από το -1 είναι ίση με 2, δηλαδή ότι $d(x,-1)=2$.

15. Αν ισχύει ότι $d(2\kappa,\lambda)-d(\kappa,2\lambda)=d(3,8)-5$, τότε να αποδείξετε ότι οι αριθμοί κ και λ είναι ίσοι ή αντίθετοι.

16. Αν για τους $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$ ισχύει η σχέση $\frac{\kappa}{|\kappa|+1}=\frac{\lambda}{|\lambda|+1}$, τότε να δείξετε ότι:

Α. κ,λ ομόσημοι

Β. $\kappa=\lambda$

17. Α. Αν για τους $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}^*$ ισχύει η σχέση $|\kappa-\lambda|^2=(|\kappa|+|\lambda|)^2$, τότε να αποδείξετε ότι οι κ και λ είναι ετερόσημοι.

Β. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\frac{\kappa}{|\kappa|}+\frac{|\lambda|}{\lambda}+\frac{\kappa-\lambda}{|\kappa-\lambda|}=1$, τότε να δείξετε ότι $\kappa>0$ και $\lambda<0$.

18. Αν για τον πραγματικό αριθμό $\kappa\neq-3$ ισχύει ότι $-1\leq\frac{3\kappa+1}{\kappa+3}\leq1$, τότε να αποδείξετε ότι $|\kappa|\leq1$.

19. Αν $\alpha,\beta\neq0$, τότε να βρείτε ποιες τιμές μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$\Pi=\frac{|\alpha|}{\alpha}+\frac{|\beta|}{\beta}+\frac{|\alpha\beta|}{\alpha\beta}$$

(Απ. Π=3 ή Π=-1)

ΘΕΩΡΙΑ

Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Ορισμός

Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον α.

- ✓ **Αν α≥0, η $\sqrt{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^2=\alpha$.**

Ιδιότητες ριζών

- $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$
- $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$
- $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Ορισμός

Η ν-οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός που, όταν υψωθεί στην ν , δίνει τον α.

- ✓ **Αν α≥0, τότε η $\sqrt[\nu]{\alpha}$ παριστάνει τη μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$.**

Ιδιότητες ριζών

- Αν $\alpha \geq 0$, τότε:

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\nu} = \alpha \quad \text{και} \quad \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = \alpha$$

- Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu}} = |\alpha|.$$

Αν $\alpha, \beta \geq 0$, τότε:

1. $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$

2. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (εφόσον $\beta \neq 0$)

3. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

4. $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$

Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Αν $\boldsymbol{a > 0}$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

Α. $\sqrt{64}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{225}$

Β. $\sqrt{81}$, $\sqrt{10000}$, $\sqrt{144}$

Γ. $\sqrt{25}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{100}$

(Απ. Α. 8, 13, 15, Β. 9, 100, 12, Γ. 5, 11, 10)

2. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις που ακολουθούν σε ισοδύναμες, χωρίς ριζικά στους παρονομαστές.

Α. $\frac{24}{\sqrt{3}}$

Β. $\frac{16}{\sqrt{3}-1}$

Γ. $\frac{12}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

(Απ. Α. $8\sqrt{3}$, Β. $8(\sqrt{3}+1)$, Γ. $6(\sqrt{7}-\sqrt{5})$)

3. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{1}{\sqrt{3}-1+\sqrt{6}}$ σε ισοδύναμη, χωρίς ριζικά στον παρονομαστή.

(Απ. $\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{6}+1)(3\sqrt{2}-4)}{4}$)

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες:

Α. $\sqrt{0.0001}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[4]{0.0001}$

Β. $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{0.001}$, $\sqrt[3]{64}$

Γ. $\sqrt[6]{1000000}$, $\sqrt{0.01}$, $\sqrt{625}$

(Απ. Α. 0.01, 2, 0.1, Β. 2, 0.1, 4, Γ. 10, 0.1, 25)

5. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς ριζικά.

Α. $\sqrt{(x-1)^2}$

Β. $\sqrt{\dfrac{x^2}{16}}$

Γ. $\sqrt{(\pi-5)^2}$

Δ. $\sqrt{(-16)^2}$

(Απ. Α. $|x-1|$, Β. $\dfrac{|x|}{4}$, Γ. $5-\pi$, Δ. 16)

6. Να αποδείξετε ότι:

Α. $(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+1})\cdot(\sqrt{x-2}+\sqrt{x+1})=-3$

Β. $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(4-\sqrt{7})^2}=2$

Γ. $\sqrt{18}+3\sqrt{32}-\sqrt{128}=7\sqrt{2}$

Δ. $\sqrt{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot(\sqrt{50}-\sqrt{32})}\cdot\sqrt{6}=6$

7. Να αποδείξετε ότι:

Α. $(\sqrt{12}+\sqrt{48}-\sqrt{5})\cdot(\sqrt{108}+\sqrt{5})=103$

Β. $(\sqrt{50}+\sqrt{32}-\sqrt{20})\cdot(9\sqrt{2}+2\sqrt{5})=142$

8. Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες:

Α. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=5$

Β. $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=1$

Γ. $\dfrac{2}{2-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{2+\sqrt{5}}=2-5\sqrt{5}$

9. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει:

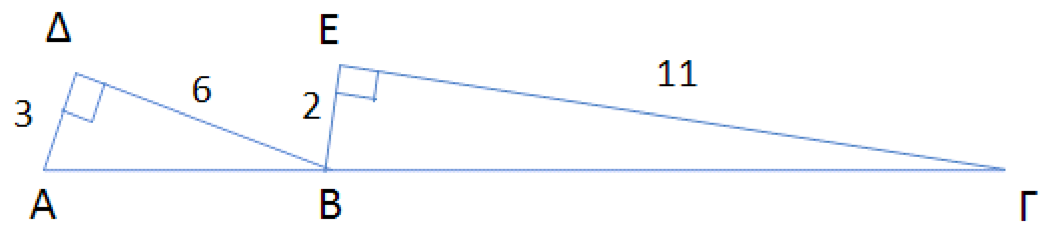
$$\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$$

τότε να υπολογίσετε την ποσότητα:

$$\mathrm{A}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$$

(Απ. $\mathrm{A}=3+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$)

10. Να εκφράσετε με τη βοήθεια ενός ριζικού το (ΑΓ) στο παρακάτω σχήμα:



(Απ. (ΑΓ)=$8\sqrt{5}$)

11. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις που ακολουθούν:

Α. $\sqrt{3-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}$

Β. $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}$

(Απ. Α. $3\sqrt{2}$, Β. 2)

12. Δίνονται οι αριθμοί:

$$\kappa=\frac{\sqrt[6]{3^4}\cdot\sqrt[4]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}} \quad \text{και} \quad \lambda=\sqrt[5]{2^4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}\cdot\sqrt[10]{2}$$

Α. Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

Β. Να μετατρέψετε το κλάσμα που ακολουθεί σε ισοδύναμο, χωρίς ριζικά στον παρονομαστή.

$$\frac{1}{5(\sqrt{\kappa}+\sqrt{\lambda})}$$

(Απ. Α. $\kappa=3$, $\lambda=2$, Β. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5}$)

13. Να βρείτε την τιμή της παράστασης που ακολουθεί:

$$\Pi = \left(\frac{9}{\sqrt{12}+\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{12\sqrt{12}+3\sqrt{3}}{\sqrt{12}+\sqrt{3}}$$

(Απ. $\Pi = -6$)

14. Να βρείτε την τιμή της παράστασης που ακολουθεί:

$$\Pi = \frac{\sqrt{2015}-\sqrt{2013}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2015}+\sqrt{2013}}$$

(Απ. $\Pi = 0$)

15. Να αποδείξετε ότι:

$$(\sqrt{3}+\sqrt{75}-\sqrt{48})(\sqrt{12}-\sqrt{27}) = -6$$

16. Να βρείτε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

Α. $\mathrm{A} = \sqrt{2^{27}+4^{12}}$

Β. $\mathrm{B} = \dfrac{\sqrt{4^{10}+16^4-2^{19}}}{4^3}$

Γ. $\Gamma = \dfrac{\sqrt[3]{3^{11}-27^3}}{\sqrt[4]{81}}$

(Απ. Α. $\mathrm{A} = 3\cdot 2^{12}$, Β. $\mathrm{B} = 12$, Γ. $\Gamma = 18$)

17. Α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$(1+2\sqrt{3})^2 \quad \text{και} \quad (1-2\sqrt{3})^2$$

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\Pi = \sqrt{13-4\sqrt{3}} - \sqrt{13+4\sqrt{3}}$$

(Απ. Α. $13+4\sqrt{3}$, $13-4\sqrt{3}$, Β. $\Pi = -2$)

18. Να βρείτε τις τιμές των x, y, z αν ισχύει ότι:

$$\sqrt{x-3} + |5x-3y| + (2y+z-4x)^2 = 0$$

<u>Υπόδειξη:</u> Το άθροισμα μη αρνητικών αριθμών είναι μηδέν όταν οι αριθμοί είναι μηδέν.

(Απ. $x=3, y=5, z=2$)

19. Να αποδείξετε ότι:

Α. $\sqrt{x} + \sqrt{y} \le 2\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$, όπου $x, y \ge 0$

Β. $\sqrt{2012} + \sqrt{2013} + \sqrt{2015} + \sqrt{2016} \le 4\sqrt{2014}$

20. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

Α. $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$

Β. $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(Απ. Α. $3+\sqrt{5}$, Β. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$)

21. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις που ακολουθούν σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

Α. $\dfrac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

Β. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$

Γ. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3}+1}$

(Απ. Α. $\dfrac{6\sqrt{5}+5\sqrt{6}-\sqrt{330}}{60}$, Β. $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4}$, Γ. $\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1$)

22. Αν ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2=1$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{\alpha^4+4\beta^2}{36}}+\sqrt{\frac{\beta^4+4\alpha^2}{36}}=\frac{1}{2}$$

23. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta>0$, ισχύει ότι $\alpha=1+\beta$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}+\sqrt{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\sqrt{2+2\sqrt{\alpha}}$$

24. Αν $\alpha>0$, τότε να γράψετε με την μορφή μιας ρίζας την παράσταση:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2}\sqrt{\alpha^4\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}}$$

(Απ. $\sqrt[12]{\dfrac{1}{\alpha}}$)

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄</u>

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στη σελ. 70)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες ισότητες:

Α. $(-5)^6 \cdot (-5^4) = (-5)^{10}$

Β. $-(-8)^0 = -15^0$

Γ. $(-1)^{12} = -1^{20}$

Δ. $4^{-1} + 2^{-1} = \dfrac{3}{4}$

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες ισότητες:

Α. $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Β. $(\beta-\alpha)^2 = (\alpha-\beta)^2$

Γ. $(-\alpha-\beta)^2 = (\alpha+\beta)^2$

Δ. $(\alpha-\beta)^3 = (\beta-\alpha)^3$

3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Ισχύει ότι $|\alpha-\beta|=|\beta-\alpha|$.

Β. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha-2|+|\alpha-3|>0$.

Γ. Ισχύει ότι $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$.

Δ. Ισχύει ότι $|\alpha+\beta|\le|\alpha|+|\beta|$.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Ισχύει ότι $|\alpha|^2=\alpha^2$.

Β. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\alpha+2|+|\beta+5|=0 \Leftrightarrow \alpha=-2$ και $\beta=-5$.

Γ. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\alpha-2|+|\beta-4|=0 \Leftrightarrow \alpha=2$ ή $\beta=4$.

Δ. Ισχύει η ισοδυναμία: $|\alpha^2-9|+|\alpha^2-3\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha=3$.

5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\sqrt{x^2-2x+1}=x-1$.

Β. Ισχύει η ισοδυναμία: $|x|>2 \Leftrightarrow -2<x<2$.

Γ. Ισχύει η ισοδυναμία: $|x|\le 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$.

Δ. Ισχύει ότι $\sqrt{(\pi-4)^2}=\pi-4$.

6. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Ισχύει ότι $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Β. Ισχύει ότι $d(x,-1) = |x-1|$.

Γ. Η ισότητα $|\alpha+\beta| = ||\alpha|-|\beta||$, ισχύει μόνο αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

Δ. Η εξίσωση $|x+2| = -2$ είναι αδύνατη.

7. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Ισχύει ότι $\sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{2}$.

Β. Ισχύει ότι $\sqrt{(\pi-10)^2} = 10-\pi$.

Γ. Ισχύει ότι $|\pi-3|-|2-\pi| = -1$.

Δ. Ισχύει ότι $\sqrt[3]{8} - 4\cdot 3^0 + |-2^0 - 1| = 0$.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Αν $x < 1$ τότε ισχύει ότι $|x-1|+|x-2|-|x-3| = -x$.

Β. Αν $1 \le x \le 2$, τότε ισχύει ότι $\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + \sqrt{(x-2)^2} = 2$.

Γ. Αν $x|x| = 1$, τότε ισχύει ότι $x = -1$ ή $x = 1$.

Δ. Αν $1 < x < 5$, τότε ισχύει ότι $d(x,3) < 2$.

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Αν $|x-2|=|2-x|$, τότε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Αν $|x-2|=5$, τότε $x=7$.

Γ. Δύο αντίθετοι αριθμοί έχουν ίσες απόλυτες τιμές.

Δ. Αν $|x|>3$, τότε $x>3$ ή $x<-3$.

10. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Αν $|x|+|y|=0$, τότε $x=0$ ή $y=0$.

Β. Ισχύει ότι $||x|+3|=|x|+3$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Γ. Αν $x+\frac{1}{x}=y$, τότε ισχύει ότι $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$.

Δ. Ισχύει ότι $(-x-y)(x-y)=x^2-y^2$.

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄ (Α-Β-Γ-Δ)
1. Λ-Σ-Λ-Σ
2. Λ-Σ-Σ-Λ
3. Σ-Σ-Λ-Σ
4. Σ-Σ-Λ-Σ
5. Λ-Λ-Σ-Λ
6. Σ-Λ-Λ-Σ
7. Λ-Σ-Σ-Σ
8. Σ-Λ-Λ-Σ
9. Σ-Λ-Σ-Σ
10. Λ-Σ-Σ-Λ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

<u>Εξισώσεις 1ου Βαθμού</u>

Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$

Έχουμε ότι:

$\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$

- Αν $\alpha\neq 0$ τότε:

$$\alpha x=-\beta \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{\alpha}$$

Άρα, αν $\alpha\neq 0$ τότε η εξίσωση $\alpha x=-\beta$, έχει <u>ακριβώς μια λύση</u> την $x=-\frac{\beta}{\alpha}$.

- Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση $\alpha x=-\beta$ γίνεται $0x=-\beta$, η οποία:

  - αν είναι $\beta\neq 0$ δεν έχει λύση και για αυτό λέμε ότι είναι <u>αδύνατη</u>.

  - αν είναι $\beta=0$ έχει τη μορφή $0x=0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό x δηλαδή είναι <u>ταυτότητα</u>.

✓ Η λύση της εξίσωσης $\alpha x+\beta=0$ και γενικά κάθε εξίσωσης λέγεται και **ρίζα** αυτής.

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $5x-3(x-1)=7-2x$

Β. $6x-3(2x-3)=2x-2(x-5)$

Γ. $5x+3(x-2)=8x-6$

(Απ. Α. $x=1$, Β. αδύνατη, Γ. ταυτότητα)

2. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$3x+\frac{5x+4}{5}=x+\frac{5}{2}$$

(Απ. $x=\frac{17}{30}$)

3. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$(x-4)^2=3x+(x-5)^2$$

(Απ. $x=-9$)

4. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$1-\frac{4x-6}{5}=3-\frac{1-2x}{5}$$

(Απ. $x=-\frac{1}{2}$)

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $\frac{4-x}{3}=\frac{2x+3}{5}$

Β. $\frac{x-2}{4}-\frac{x-14}{6}=\frac{3x-2}{2}-\frac{x-2}{3}$

Γ. $\frac{x+2}{4}=4-\frac{2x+5}{3}$

(Απ. Α. $x=1$, Β. $x=2$, Γ. $x=2$)

6. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda-1)x=16$.

Α. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=5$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda\neq1$.

Γ. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε για την εξίσωση αν $\lambda=1$;

Δ. Για ποια τιμή του λ η εξίσωση έχει λύση τον αριθμό 8;

(Απ. Α. $x=4$, Β. $x=\frac{16}{\lambda-1}$, Γ. Η εξίσωση είναι αδύνατη, Δ. $\lambda=3$)

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\lambda^2(x-1)+3\lambda=x+2$$

(Απ. Αν $\lambda\neq\pm1$ τότε $x=\frac{\lambda-2}{\lambda+1}$, αν $\lambda=1$ τότε η εξίσωση είναι ταυτότητα,

αν $\lambda=-1$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.)

8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $-4x^2+(2x+1)(2x-1)+2x=0$

Β. $2x^2-x^3+x-2=0$

Γ. $x^3-3x^2+(1-2x)(x-3)=0$

(Απ. Α. $x=\frac{1}{2}$, Β. $x=2$ ή $x=1$ ή $x=-1$, Γ. $x=1$ ή $x=3$)

9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $\frac{2|x|+8}{3}=\frac{4}{3}+\frac{2|x|+8}{5}$

Β. $|2x+5|=3$

(Απ. Α. $x=\pm 1$, Β. $x=-1$ ή $x=-4$)

10. Να λύσετε την εξίσωση: $\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4$

(Απ. $x=-\frac{9}{5}$ ή $x=-5$)

11. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{x^3-27}{x-3}=x^2+12$$

(Απ. $x=1$)

12. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x^2-9}$

Β. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1}$

<u>Υπόδειξη:</u> Β. Προσοχή στους περιορισμούς!

(Απ. Α. $x=1$, Β. αδύνατη)

13. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

Α. $|2x+5|=|3x-2|$

Β. $|3x-2|=2x-8$

<u>Υπόδειξη:</u> Α. Η εξίσωση $|f(x)|=|g(x)|$ έχει λύσεις: $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$.

Β. Όταν έχουμε εξίσωση της μορφής $|f(x)|=g(x)$ τότε πρέπει να είναι $g(x)\geq 0$.

Οι λύσεις είναι: $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$.

(Απ. Α. $x=7$ ή $x=-\frac{3}{5}$, Β. αδύνατη)

14. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$\big|3|x|-2\big|=4$$

(Απ. $x=\pm 2$)

15. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$\sqrt{x^2-4x+4}=|5x-7|$$

(Απ. $x=\frac{5}{4}$ ή $x=\frac{3}{2}$)

16. Να λύσετε την εξίσωση που ακολουθεί:

$$|x^2+2|-|2x-x^2-1|-4=0$$

(Απ. $x=\frac{3}{2}$)

17. Ένα μηχανάκι κινείται με 80 km/h. Ένα αυτοκίνητο που κινείται με 100 km/h προσπερνάει το μηχανάκι. Σε πόσα λεπτά το αυτοκίνητο θα βρίσκεται 2 km μπροστά από το μηχανάκι;

(Απ. 6 λεπτά)

18. Αν όλοι οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου ενός σχολείου τοποθετηθούν ανά τρεις στα θρανία, παραμένουν όρθιοι 7 μαθητές. Αν τοποθετηθούν ανά τέσσερις, χρειάζονται ακόμη 19 μαθητές για να συμπληρωθούν οι κενές θέσεις των θρανίων. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών, καθώς και το πλήθος των θρανίων.

(Απ. 85 μαθητές, 26 θρανία)

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και ***ν περιττό*** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha > 0}$ και ***ν άρτιο*** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και ***ν περιττό*** φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μια λύση την $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

Η εξίσωση $x^\nu = \alpha$, με $\boldsymbol{\alpha < 0}$ και ***ν άρτιο*** φυσικό αριθμό, είναι αδύνατη.

<u>Σημειώστε ότι:</u>

- Αν ο ν <u>περιττός</u>, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει μοναδική λύση την $x = \alpha$.
- Αν ο ν <u>άρτιος</u>, τότε η εξίσωση $x^\nu = \alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις,

  τις $x_1 = \alpha$ και $x_2 = -\alpha$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^3-216=0$

Β. $x^4-256=0$

Γ. $x^5-1=0$

Δ. $x^5+1=0$

(Απ. Α. $x=6$, Β. $x=\pm 4$, Γ. $x=1$, Δ. $x=-1$)

2. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^6-64=0$

Β. $x^5-64x^2=0$

Γ. $x^4-x=0$

Δ. $x^5+81x=0$

(Απ. Α. $x=\pm 2$, Β. $x=0$ ή $x=4$, Γ. $x=0$ ή $x=1$, Δ. $x=0$)

3. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $3x^5+7x^2=2x^5-x^2$

Β. $x^6+34x^3=7x^3$

Γ. $8x^4=-x^2$

(Απ. Α. $x=0$ ή $x=-2$, Β. $x=0$ ή $x=-3$, Γ. $x=0$)

4. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(x-1)^3=27$

Β. $(x+3)^4=16$

Γ. $1+27x^3=0$

Δ. $(x-2)^4-64(x-2)=0$

(Απ. Α. $x=4$, Β. $x=-1$ ή $x=-5$, Γ. $x=-\frac{1}{3}$, Δ. $x=2$ ή $x=6$)

5. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(2x-4)^5=-32$

Β. $(2x-4)^3-121(2x-4)=0$

(Απ. Α. $x=1$, Β. $x=2$ ή $x=\frac{15}{2}$ ή $x=-\frac{7}{2}$)

6. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^7-8x^4+2x^3-16=0$

Β. $x^{10}-81x^6=x^4-81$

Γ. $(|2x+5|-1)^4=81$

(Απ. Α. $x=2$, Β. $x=\pm 1$ ή $x=\pm 3$, Γ. $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{9}{2}$)

ΘΕΩΡΙΑ

Εξισώσεις 2^{ου} Βαθμού

Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας εξίσωσης συνοψίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$	Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \alpha\neq 0$
$\Delta>0$	Έχει δύο ρίζες άνισες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$
$\Delta=0$	Έχει μια διπλή ρίζα τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$
$\Delta<0$	Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Τύποι του Vieta

Έστω ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ έχει πραγματικές ρίζες x_1, x_2.

Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα x_1+x_2 και με P το γινόμενο $x_1\cdot x_2$ τότε έχουμε τους τύπους:

$$\boxed{S=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P=\frac{\gamma}{\alpha}}$$

Οι παραπάνω τύποι είναι γνωστοί ως τύποι του Vieta.

- ✓ Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, με τη βοήθεια των τύπων του Vieta μετασχηματίζεται μετά από πράξεις ως εξής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2-Sx+P=0$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^2-3x+2=0$

Β. $x^2-2x+1=0$

Γ. $x^2+x-6=0$

Δ. $x^2-2x+3=0$

(Απ. Α. $x=1$ ή $x=2$, Β. $x=1$, Γ. $x=2$ ή $x=-3$, Δ. αδύνατη)

2. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $2x^2+32=0$

Β. $3x^2-x=0$

Γ. $x^2-4=0$

(Απ. Α. αδύνατη, Β. $x=0$ ή $x=\frac{1}{3}$, Γ. $x=2$ ή $x=-2$)

3. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2+30x+198=0$$

χωρίς να τη λύσετε.

Υπόδειξη: Να χρησιμοποιήσετε τους τύπους του Vieta.

(Απ. $S=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{30}{1}=-30$, $P=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{198}{1}=198$)

4. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(2x^2-18)^2+(x-3)^2=0$

Β. $(x-3)^2+5=0$

Γ. $3(x^2-5x+6)^{2012}=0$

(Απ. Α. $x=3$, Β. αδύνατη, Γ. $x=2$ ή $x=3$)

5. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$4x^2-2(\sqrt{3}+1)x+\sqrt{3}=0$$

(Απ. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ή $x=\frac{1}{2}$)

6. Να βρείτε την εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς:

Α. 3 και 4

Β. 2 και $\frac{1}{2}$

Γ. 3 και $\sqrt{2}$

(Απ. Α. $x^2-7x+12=0$, Β. $2x^2-5x+2=0$, Γ. $x^2-(3+\sqrt{2})x+3\sqrt{2}=0$)

7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2-\lambda x-1=0$ έχει δύο λύσεις για κάθε τιμή του λ.

<u>Υπόδειξη:</u> Αρκεί να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι θετική για κάθε τιμή του λ.

8. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$x^2 - 2x + \lambda = 0$$

έχει μια πραγματική ρίζα.

(Απ. $\lambda = 1$)

9. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^2 + |x| - 2 = 0$

Β. $2(x-2)^2 - 3|x-2| + 1 = 0$

(Απ. Α. $x = \pm 1$, Β. $x = 1$, $x = 3$, $x = \frac{3}{2}$ και $x = \frac{5}{2}$)

10. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

(Απ. $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$)

11. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

(Απ. $x = \alpha$ ή $x = \beta$)

12. Να λυθεί η εξίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{x^2-1}{3}-\frac{x+3}{5}=x-2$$

(Απ. $x=2$ ή $x=\frac{8}{5}$)

13. Αν α,β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha\neq 0$, τότε να αποδείξετε ότι η παρακάτω εξίσωση έχει μία τουλάχιστον λύση.

$$\alpha x^2+(\alpha+\beta)x+\beta=0$$

<u>Υπόδειξη:</u> Αρκεί να αποδείξετε ότι είναι: $\Delta \geq 0$.

14. Έστω ότι η μια ρίζα της εξίσωσης

$$x^2+\beta x-4=0$$

είναι το 2.

Στην περίπτωση αυτή, να βρείτε την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

(Απ. $x=-2$)

15. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^4+5x^2-36=0$

Β. $x^4+x^2-2=0$

(Απ. Α. $x=\pm 2$, Β. $x=\pm 1$)

16. Να λύσετε την εξίσωση $4x^2+\beta x+9=0$ αν η εξίσωση αυτή έχει κοινή λύση με την εξίσωση $4x+2=0$.

(Απ. $x=-\frac{1}{2}$ ή $x=-\frac{9}{2}$)

17. Αν είναι γνωστό ότι η εξίσωση:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \text{με}\ \alpha\neq 0$$

έχει ρίζα το 1, τότε να δείξετε ότι η εξίσωση:

$$\alpha^3x^2-(\beta^3+\gamma^3)x-3\alpha\beta\gamma=0$$

έχει ρίζα το -1.

18. Έστω ότι x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2+4x+2=0$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

Α. x_1+x_2

Β. x_1x_2

Γ. $x_1^2+x_2^2$

Δ. $(3x_1-4)(3x_2-4)$

Ε. $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$

(Απ. Α. -4, Β. 2, Γ. 12, Δ. 82, Ε. 3)

19. Να βρείτε για ποιες τιμές του κ η εξίσωση:

$$x^2+(7-\kappa)x+6-\kappa=0$$

έχει:

Α. Δύο ρίζες αντίστροφες.

Β. Δύο ρίζες αντίθετες.

Γ. Δύο ετερόσημες ρίζες.

(Απ. Α. $\kappa=5$, Β. $\kappa=7$, Γ. $\kappa>6$)

20. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $\left|x-x^2\right|+\left|10-11x+x^2\right|=0$

Β. $x^2+\dfrac{1}{x^2}+x+\dfrac{1}{x}-4=0$

Γ. $\dfrac{2x}{x^2-3}-\dfrac{3-x^2}{2x}-2=0$

(Απ. Α. $x=1$, Β. $x=1$ ή $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$, Γ. $x=-1$ ή $x=3$)

21. Να λύσετε τις εξισώσεις που ακολουθούν:

Α. $(x-1)^2-4\sqrt{x^2-2x+1}+3=0$

Β. $(|x|-2)^2-6\sqrt{x^2-4|x|+4}+8=0$

(Απ. Α. $x=0, x=\pm 2, x=4$, Β. $x=0, x=\pm 4, x=\pm 6$)

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄</u>

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στη σελ. 91)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η εξίσωση $\alpha \cdot x = 0$ δεν είναι ποτέ αδύνατη.

Β. Η εξίσωση $(\alpha - 2)\cdot x = \alpha^2 - 4$, είναι αόριστη, όταν $\alpha = 2$.

Γ. Η εξίσωση $\alpha^2 \cdot x = 1 - \alpha$, είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, όταν $\alpha = 1$.

Δ. Η εξίσωση $(\alpha - 1)\cdot x = \alpha^3 - 1$, έχει μία μόνο λύση, όταν $\alpha \neq 1$.

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η εξίσωση $x - 5 = 2x + 6 - x$ είναι αδύνατη.

Β. Η εξίσωση $2x + 6 = 3 + 3x + 3 - x$ είναι αδύνατη.

Γ. Η εξίσωση $2x + 4 = 12$ έχει λύση την $x = 4$.

Δ. Η εξίσωση $3x + 16 = 3(x + 8)$ έχει άπειρες λύσεις.

3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η λύση της εξίσωσης $(3x+1)^2 - 4 = 9(x^2 + 5)$ είναι ο αριθμός 8.

Β. Το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 9)x = 0$ είναι 7.

Γ. Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $16x^2 - 15x + 1 = 0$.

Δ. Ο αριθμός -1 είναι λύση της εξίσωσης $22x^2 + 21x - 1 = 0$.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $x^2+3x-5=0$ είναι -3.

Β. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$ είναι -5.

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-3x+1=0$ τότε ισχύει ότι $x_1^2+x_2^2=2$.

Δ. Η εξίσωση $x^2-2x-1=0$ έχει ρίζες τους αριθμούς $1+\sqrt{2}$ και $1-\sqrt{2}$.

5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η εξίσωση $5x^2+2=0$ έχει λύση οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό.

Β. Η εξίσωση $(x+3)(2x+6)=0$ έχει διπλή λύση τον αριθμό $x=-3$.

Γ. Η εξίσωση $x(x^2+1)=0$ έχει μοναδική λύση τον αριθμό 0.

Δ. Η εξίσωση $x^2-9x+20=x(x-2)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού.

6. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η εξίσωση $2x^2-5x+4=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Β. Η εξίσωση $x^2-3x+2=0$ έχει μια διπλή ρίζα.

Γ. Η εξίσωση $2x^2+10=0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Δ. Η εξίσωση $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ έχει δύο ρίζες άνισες, τις $x_1=\sqrt{2}$ και $x_2=1$.

7. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\kappa x^2+\lambda x+\mu=0$, με $\kappa\neq 0$ είναι $\lambda^2-4\kappa\mu$.

Β. Η εξίσωση $\kappa x^2+\mu=0$, με $\kappa\neq 0$, έχει πάντα αρνητική διακρίνουσα.

Γ. Η εξίσωση $x^2+\lambda x+\mu=0$, με $\lambda,\mu\neq 0$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών για όλες τις τιμές των λ και μ, με την εξίσωση: $-\mu x^2-\lambda x-1=0$.

Δ. Αν η εξίσωση $\kappa x^2+\lambda x+\mu=0$, με $\kappa\neq 0$ έχει ρίζα τον αριθμό ρ, τότε η εξίσωση $\kappa x^2+2\lambda x+4\mu=0$, έχει ρίζα τον αριθμό 2ρ.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η εξίσωση $x^2(2x^2+1)+2(2x^2+1)=0$ έχει δύο άνισες λύσεις.

Β. Το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $3(2-x)+x(2-x)=0$ είναι ίσο με -6.

Γ. Αν μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού έχει διακρίνουσα θετική, τότε δεν έχει λύση.

Δ. Η εξίσωση $4x^2-9=0$ έχει διακρίνουσα Δ=144.

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\sqrt{3}x^2-\sqrt{13}x+\sqrt{3}=0$ είναι ίση με 1.

Β. Η εξίσωση $\alpha x=\alpha$ για $\alpha\neq 0$ είναι αόριστη.

Γ. Αν η διακρίνουσα Δ ενός τριωνύμου είναι μηδέν, τότε το τριώνυμο γράφεται σαν τετράγωνο διωνύμου.

Δ. Η εξίσωση $x^{2015}=-1$ είναι αδύνατη.

10. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

Α. Οι όροι της εξίσωσης $\frac{3}{x-2}+\frac{5}{2x}-7=0$ ορίζονται αν $x \neq 2$ και $x \neq 0$.

Β. Ο αριθμός 3 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{3}{x}+\frac{x-3}{x-3}=2$.

Γ. Αν απαλείψουμε τους παρονομαστές της εξίσωσης $\frac{8}{x^3}-\frac{9}{x^2}=\frac{10}{x}$, τότε αυτή γράφεται $8-9x=10x^2$ όπου $x \neq 0$.

Δ. Οι όροι της εξίσωσης $\frac{4x}{x^2+3}=x^3$ ορίζονται για κάθε πραγματικό αριθμό x και ο αριθμός 1 είναι λύση της.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄ (Α-Β-Γ-Δ)
1. Σ-Σ-Λ-Σ
2. Σ-Λ-Σ-Λ
3. Σ-Λ-Λ-Σ
4. Σ-Λ-Λ-Σ
5. Λ-Σ-Σ-Λ
6. Σ-Λ-Σ-Σ
7. Σ-Λ-Σ-Σ
8. Λ-Σ-Λ-Σ
9. Σ-Λ-Σ-Λ
10. Σ-Λ-Σ-Σ

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

<u>Ανισώσεις 1ου Βαθμού</u>

Οι ανισώσεις $\alpha x+\beta>0$ και $\alpha x+\beta<0$

Έχουμε ότι:

$$\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow \alpha x>-\beta$$

- Αν $\alpha>0$, τότε:

$$x>-\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha<0$, τότε:

$$x<-\frac{\beta}{\alpha}$$

- Αν $\alpha=0$, τότε η ανίσωση γίνεται: $0x>-\beta$, η οποία:

✓ Αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν είναι $\beta>0$
✓ Είναι αδύνατη, αν είναι $\beta\leq 0$

<u>Ανισώσεις με απόλυτες τιμές</u>

➢ $|x|<\rho \Leftrightarrow -\rho<x<\rho$
➢ $|x|>\rho \Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $-\frac{2x+3}{4}-\frac{3x}{16}\geq-\frac{x+5}{8}+1$

Β. $\frac{x-1}{2}+\frac{2(x-2)}{4}<\frac{5x}{8}$

(Απ. Α. $x\leq-2$, Β. $x<4$)

2. Να λύσετε και να συναληθεύσετε τις ανισώσεις:

$$-x-14<\frac{x+7}{2}+\frac{1-x}{3}\quad \text{και} \quad 5x+3\leq\frac{x+7}{2}+\frac{1-x}{3}$$

(Απ. $\frac{-107}{7}<x\leq\frac{5}{29}$)

3. Να εξετάσετε αν συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$5-3(x+2)\geq 2x-1 \quad \text{και} \quad 2(x+3)+5\leq 3x-2$$

(Απ. όχι)

4. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$\frac{|x|-4}{2}+\frac{2|x|+1}{4}\leq\frac{|x|}{8}$$

(Απ. $-2\leq x\leq 2$)

5. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $|x|<5$

Β. $|x-1|\leq 3$

Γ. $|x|\geq 2$

Δ. $|2x+3|>4$

(Απ. Α. $-5<x<5$, Β. $-2\leq x\leq 4$, Γ. $x\leq -2$ ή $x\geq 2$, Δ. $x<-\frac{7}{2}$ ή $x>\frac{1}{2}$)

6. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι:

$$3\leq |x-2|\leq 5$$

(Απ. $x\in[-3,-1]\cup[5,7]$)

7. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$\sqrt{x^2-4x+4}\leq 3$$

(Απ. $-1\leq x\leq 5$)

8. Να λύσετε τις ανισώσεις που ακολουθούν:

Α. $||x|-3|<2$

Β. $||x-2|-3|\leq 1$

(Απ. Α. $x\in(-5,-1)\cup(1,5)$, Β. $x\in[-2,0]\cup[4,6]$)

9. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $-4 \le x-2 \le 5$

Β. $5 \le 2(x+3)-3 \le 9$

Γ. $8 \le 2(1-3x) \le 14$

(Απ. Α. $-2 \le x \le 7$, Β. $1 \le x \le 3$, Γ. $-2 \le x \le -1$)

10. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $d(x,-4) > 3$

Β. $2|x+1| - d(x,-1) < d(x,3)$

(Απ. Α. $x < -7$ ή $x > -1$, Β. $x < 1$)

11. Δίνεται η ανίσωση $|x-\kappa| < \lambda$, με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ της οποίας λύση είναι το διάστημα (1, 7). Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

(Απ. $\kappa = 4, \lambda = 3$)

12. Δίνονται οι αριθμοί κ και λ για τους οποίους ισχύει ότι:

$$|3-\kappa-2\lambda| + |2-\lambda| = 0$$

Α. Να βρείτε τους αριθμούς κ και λ.

Β. Να λύσετε την ανίσωση $|x-\kappa-\lambda| \le |x-\lambda|$.

(Απ. Α. $\kappa = -1, \lambda = 2$, Β. $x \le \frac{3}{2}$)

ΘΕΩΡΙΑ

Ανισώσεις 2ου Βαθμού

Μορφές Τριωνύμου

- Η παράσταση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ λέγεται τριώνυμο 2ου βαθμού ή πιο απλά τριώνυμο.
- Η διακρίνουσα Δ της αντίστοιχης εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ λέγεται και διακρίνουσα του τριωνύμου.
- Οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δηλαδή οι:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{και} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

ονομάζονται και ρίζες του τριωνύμου.

Αποδεικνύεται μετά από πράξεις ότι ισχύει:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha^2}\right]$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\Delta>0$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2),$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου.

- Αν $\Delta=0$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- Αν $\Delta<0$, τότε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{|\Delta|}{4\alpha^2}\right].$$

Πρόσημο των Τιμών του Τριωνύμου

Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$ γίνεται:

- **Ετερόσημο του α**, μόνο όταν είναι $\Delta>0$ και για τις τιμές του x, που βρίσκονται **μεταξύ των ριζών**.
- **Μηδέν**, όταν η τιμή του x είναι κάποια από τις ρίζες του τριωνύμου.
- **Ομόσημο του α** σε κάθε άλλη περίπτωση.

Τα παραπάνω συμπεράσματα χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma>0 \quad \text{ή} \quad \alpha x^2+\beta x+\gamma<0,\ \alpha\neq 0$$

Τις ανισώσεις αυτές τις ονομάζουμε ανισώσεις $2^{ου}$ βαθμού.

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τα παρακάτω τριώνυμα:

Α. $2x^2-5x+3=0$

Β. x^2+x-6

Γ. $4x^2+7x-2=0$

(Απ. Α. $(x-1)(2x-3)$, Β. $(x-2)(x+3)$, Γ. $(x+2)(4x-1)$)

2. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

Α. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$

Β. $\dfrac{2x^2-x-6}{3(x-2)}$

Γ. $\dfrac{(x+1)^2-4x}{2(x-1)}$

(Απ. Α. $\dfrac{x-2}{x+2}$, Β. $\dfrac{2x+3}{3}$, Γ. $\dfrac{x-1}{2}$)

3. Δίνεται η παράσταση: $\Pi=\dfrac{(x^2-5|x|+6)(x^2-5|x|+4)}{x^2-3|x|+2}$

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση.

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση Π.

(Απ. Α. $x\neq\pm1$, $x\neq\pm2$, Β. $(|x|-3)(|x|-4)$)

4. Να λύσετε τις ανισώσεις που ακολουθούν:

Α. $x^2-3x+2\geq 0$

Β. $2x^2-3x+1<0$

Γ. $x^2+x-6\leq 0$

(Απ. Α. $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, Β. $x\in(\frac{1}{2},1)$, Γ. $x\in[-3,2]$)

5. Να λύσετε τις ανισώσεις που ακολουθούν:

Α. $6x^2\leq 12x$

Β. $4x^2-6x-10<0$

Γ. $3x^2+5x-8>0$

Δ. $-2x^2+3x-1\geq 0$

(Απ. Α. $x\in[0,2]$, Β. $x\in(-1,\frac{5}{2})$, Γ. $x\in(-\infty,-\frac{8}{3})\cup(1,+\infty)$, Δ. $x\in[\frac{1}{2},1]$)

6. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $x^2-2x+1\geq 0$

Β. $x^2-4x+4<0$

Γ. $-x^2+3x-2\geq 0$

Δ. $-x^2+6x-9\leq 0$

Ε. $-x^2+8x-16\geq 0$

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}$, Β. αδύνατη, Γ. $x\in[1,2]$, Δ. $x\in\mathbb{R}$, Ε. $x=4$)

7. Να λύσετε την ανίσωση που ακολουθεί:

$$-\frac{1}{2}(x^2-5x+4)>0$$

(Απ. $x\in(1,4)$)

8. Να απλοποιήσετε την παράσταση που ακολουθεί:

$$\frac{x^2-\alpha x+2\beta x-2\alpha\beta}{x^2+3\beta x+2\beta^2}$$

(Απ. $\frac{x-\alpha}{x+\beta}$)

9. Να βρείτε τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$ για τις οποίες συναληθεύουν οι παρακάτω ανισώσεις:

$$x^2-3x+2<0 \quad \text{και} \quad 2x^2-x-3<0$$

(Απ. $x\in(1,\frac{3}{2})$)

10. Α. Να μετατρέψετε σε γινόμενα παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha^3-\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+\beta^3 \quad \text{και} \quad \alpha^3-\alpha\beta^2+2\beta\alpha^2-2\beta^3$$

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση που ακολουθεί:

$$\frac{\alpha^3-\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+\beta^3}{\alpha^3-\alpha\beta^2+2\beta\alpha^2-2\beta^3}$$

(Απ. Α. $(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$ και $(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, Β. $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+2\beta}$)

11. Δίνεται το τριώνυμο: $(\lambda+1)x^2-4\lambda x+2\lambda, \lambda\neq -1$.

Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να λύσετε την ανίσωση Δ<0.

(Απ. $\lambda\in(0,1)$)

12. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η ανίσωση $x^2+4\lambda x-5\lambda>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Απ. $\lambda\in(-\frac{5}{4},0)$)

13. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $-x^2+(3-\lambda)x+\lambda-6=0$ έχει πραγματικές και άνισες ρίζες.

(Απ. $\lambda\in(-\infty,-3)\cup(5,+\infty)$)

14. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $4x^2-6x-4\lambda^2+10\lambda+24=0$ έχει ετερόσημες ρίζες.

(Απ. $\lambda\in(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(4,+\infty)$)

15. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $|2x+2|\leq|x-3|$

Β. $3|x-1|\geq|2x+6|$

(Απ. Α. $x\in[-5,\frac{1}{3}]$, Β. $x\in(-\infty,-\frac{3}{5}]\cup[9,+\infty)$)

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

<u>Ανισώσεις Γινόμενο & Ανισώσεις Πηλίκο</u>

<u>Πρόσημο Γινομένου</u>

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο:

$$P(x) = A(x)\cdot B(x)\cdot \ldots \cdot \Phi(x)$$

ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), \ldots, \Phi(x)$ είναι της μορφής $\alpha x+\beta$ (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (τριώνυμα).

<u>Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του</u> $P(x)$.

- Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής:

$$A(x)\cdot B(x)\cdot \ldots \cdot \Phi(x) > 0 \quad (<0)$$

- Ανισώσεις της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad (<0)$

  Όπως είναι γνωστό το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα: Άρα έχουμε ότι:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x) > 0$$

και

$$\frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x) < 0$$

  αφού καμία από τις λύσεις της $A(x)\cdot B(x) > 0$ και της $A(x)\cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το $B(x)$.

- Η ανίσωση της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για: $A(x)\cdot B(x) \geq 0$ και $B(x) \neq 0$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πρόσημο του γινομένου που ακολουθεί:

$$P(x)=(3x-6)(x^2-3x+2)(x+1)$$

(Απ. $P(x)>0$ για $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$, $P(x)<0$ για $x\in(-1,1)$, $P(x)=0$ για $x=\pm 1,2$)

2. Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)(x^2+2)(x^2-4)>0$.

(Απ. $x\in(-2,2)\cup(2,+\infty)$)

3. Να λύσετε την ανίσωση $(3-x)(3x^2+9x)(x^2+5)\le 0$.

(Απ. $x\in[-3,0]\cup[3,+\infty)$)

4. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $\dfrac{x-2}{x+3}>0$

Β. $\dfrac{x+3}{2-x}\le 0$

(Απ. Α. $x\in(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$, Β. $x\in(-\infty,-3]\cup(2,+\infty)$)

5. Να λύσετε την ανίσωση $\dfrac{x}{2x-4}\le\dfrac{3}{x-1}$.

(Απ. $x\in(1,2)\cup[3,4]$)

6. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

Α. $\dfrac{2x+4}{x-1}>3$ Β. $\dfrac{x-2}{x+1}\le 2$

(Απ. Α. $x\in(1,7)$, Β. $x\in(-\infty,-4]\cup(-1,+\infty)$)

7. Να λύσετε την ανίσωση $\left|\dfrac{x+2}{x}\right|>3$.

(Απ. $x\in(-\dfrac{1}{2},0)\cup(0,1)$)

8. Να λύσετε την ανίσωση $x^2+\dfrac{1}{x^2}-4(x+\dfrac{1}{x})\ge -5$.

(Απ. $x\in(-\infty,0)\cup(0,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}]\cup[\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},+\infty)$)

9. Να λύσετε την ανίσωση $4\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)^2+4\dfrac{2x-1}{x-2}\le 8$.

(Απ. $x\in[-1,\dfrac{5}{4}]$)

10. Να βρείτε για ποιες τιμές του x συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2+x-6}\le 0 \quad \text{και} \quad \frac{3}{x-5}+1\le 0$$

(Απ. $x\in(2,5)$)

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄</u>

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στη σελ. 109)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ισχύει ότι: $x^2 > 4 \Leftrightarrow -2 < x < 2$.

Β. Οι ανισώσεις $\dfrac{x-4}{x^2+3} \geq 1$ και $x-4 \geq x^2+3$ είναι ισοδύναμες.

Γ. Η ανίσωση $x^2 - x + 3 > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ. Ισχύει ότι: $|x-3| < 7 \Leftrightarrow x \in (-3,10)$.

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Αν ισχύει $-3 < -x \leq 2$, τότε το x βρίσκεται στο διάστημα $[-2,3)$.

Β. Η ανίσωση $0x < -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ. Η ανίσωση $0x > \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$ είναι αδύνατη.

Δ. Η ανίσωση $|x-2| > 0$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η ανίσωση $|6x-5| \leq -5$ είναι αδύνατη.

Β. Ισχύει ότι: $x|x| - 2x < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2) \cup (0,2)$.

Γ. Η ανίσωση $-x^2 + 3x - 4 \geq 0$ είναι αδύνατη.

Δ. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $x^2 - 3xy + 3y^2 + 1 < 0$.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η ανίσωση $x^2 - x > -1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Αν η εξίσωση $2x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, τότε και η ανίσωση $2x^2 + \kappa x + \lambda > 0$ είναι αδύνατη.

Γ. Οι ανισώσεις $\frac{x-1}{x^2-16} \le 1$ και $x - 1 \le x^2 - 16$ είναι ισοδύναμες.

Δ. Αν $|x| < 1$, τότε $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$.

5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ είναι αρνητικό όταν $x \in (1, 3)$.

Β. Ισχύει ότι: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 4} \ge 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \ge 0$.

Γ. Αν $\alpha > -2$ τότε $-2\alpha + 3 > 7$.

Δ. Ισχύει ότι: $-x^2 + 2x - 1 = [-(x-1)]^2$.

6. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \ne 0$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 τότε ισχύει $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x + x_1)(x + x_2)$.

Β. Αν $\theta > 0$ τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

Γ. Ισχύει ότι: $\frac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Δ. Ισχύει ότι: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

7. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Αν $\alpha > -3$ τότε $6+2\alpha > 3+\alpha$.

Β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ τότε ισχύει ότι: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Γ. Ισχύει ότι: $3x^2 - 12x > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}^*$.

Δ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$ τότε ισχύει ότι: $x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 1$.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η εξίσωση $x^2 - (\kappa - 1)x + \kappa - 2 = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Β. Αν α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ τότε ισχύει ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 13$.

Γ. Αν Δ=0 τότε η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ($\alpha \neq 0$) έχει δύο ίσες ρίζες $x_1 = x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Δ. Αν $\alpha > 0$ και Δ<0 τότε η ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma < 0$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ισχύει ότι: $\dfrac{x-2}{-x^2+3x-5} > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Β. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $(x-2y)^2 - 3(x-2y) + 6 > 0$.

Γ. Ισχύει ότι: $2x^2 - 3x + 1 = (x-1)(2x-1)$.

Δ. Αν $|x-3| \leq 5$ τότε $-3 \leq x \leq 5$.

10. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Το τριώνυμο $x^2 - x - 12$ είναι θετικό όταν $x \in (-3, 4)$.

Β. Οι ανισώσεις $3(x-2) < 6$ και $3(x-2) > 2(1-x)$ είναι ισοδύναμες.

Γ. Η εξίσωση $x^2 + 3x + 2 = 0$ έχει δύο ρίζες με άθροισμα 3 και γινόμενο 2.

Δ. Ισχύει ότι: $|x| > 4 \Leftrightarrow x < -4$ ή $x > 4$.

ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄ (Α-Β-Γ-Δ)
1. Λ-Σ-Σ-Λ
2. Σ-Λ-Σ-Λ
3. Σ-Σ-Σ-Λ
4. Σ-Λ-Λ-Λ
5. Σ-Σ-Λ-Λ
6. Λ-Σ-Λ-Σ
7. Σ-Σ-Λ-Σ
8. Λ-Σ-Λ-Λ
9. Λ-Σ-Σ-Λ
10. Λ-Λ-Λ-Σ

ΠΡΟΟΔΟΙ

ΘΕΩΡΙΑ

Ακολουθίες

Η έννοια της ακολουθίας

Γενικά ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι μια αντιστοίχιση των φυσικών αριθμών 1, 2, 3,..., ν,... στους πραγματικούς αριθμούς. Ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 1 καλείται πρώτος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $α_1$, ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ο 2 καλείται δεύτερος όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $α_2$ κ.λ.π.

Γενικά ο αριθμός στον οποίο αντιστοιχεί ένας φυσικός αριθμός ν καλείται ν-οστός ή γενικός όρος της ακολουθίας και τον συμβολίζουμε συνήθως με $α_ν$.

Δηλαδή: $1\to α_1$, $2\to α_2$, $3\to α_3$,..., $ν\to α_ν$,...

Την ακολουθία αυτή τη συμβολίζουμε $(α_ν)$.

Ακολουθίες που ορίζονται αναδρομικά

Λέμε ότι η ακολουθία $(α_ν)$ ορίζεται αναδρομικά και η ισότητα $α_{ν+2}=α_{ν+1}+α_ν$ λέγεται αναδρομικός τύπος της ακολουθίας. Γενικότερα, για να ορίζεται μια ακολουθία αναδρομικά, απαιτείται να γνωρίζουμε:

1. Τον αναδρομικό της τύπο και

2. Όσους αρχικούς όρους μας χρειάζονται, ώστε ο αναδρομικός τύπος να αρχίσει να δίνει όρους.

<u>ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1. Να βρείτε τους πέντε πρώτους όρους των παρακάτω ακολουθιών:

Α. $\alpha_\nu = 3\nu + 2$

Β. $\alpha_\nu = 2\nu^2 + \nu$

Γ. $\alpha_\nu = (-1)^{\nu+1} \cdot \dfrac{1}{\nu}$

Δ. $\alpha_\nu = |3-\nu|$

(Απ. Α. α_1=5, α_2=8, α_3=11, α_4=14, α_5=17, Β. α_1=3, α_2=10, α_3=21, α_4=36, α_5=55,

Γ. α_1=1, α_2=$-\dfrac{1}{2}$, α_3=$\dfrac{1}{3}$, α_4=$-\dfrac{1}{4}$, α_5=$\dfrac{1}{5}$, Δ. α_1=2, α_2=1, α_3=0, α_4=1, α_5=2)

2. Να βρείτε τον ν-οστό όρο των ακολουθιών:

Α. $\alpha_1=2$, $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+3$

Β. $\alpha_1=1$, $\alpha_{\nu+1}=2\alpha_\nu$

(Απ. Α. $\alpha_\nu=3\nu-1$, Β. $\alpha_\nu=2^{\nu-1}$)

3. Δίνεται η ακολουθία: $\alpha_\nu = \kappa \cdot 2^\nu + \lambda$. Αν ο τέταρτος όρος της ακολουθίας είναι ο 30 και πέμπτος όρος της είναι ο 78 τότε να βρείτε:

Α. Τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Β. Τους δύο πρώτους όρους της ακολουθίας.

(Απ. Α. $\kappa = 3$, $\lambda = -18$, Β. α_1=-12, α_2=-6)

<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

<u>Αριθμητική Πρόοδος</u>

<u>Ορισμός</u>

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος**, αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **ω** και τον λέμε <u>διαφορά της προόδου</u>.

Άρα, η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega}$$

ή

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega}$$

Αποδεικνύεται ότι:

Ο $\nu^{\text{ος}}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι
$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$$

<u>Αριθμητικός Μέσος</u>

Αποδεικνύεται ότι:

Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου
αν και μόνο αν ισχύει $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Ο **β** λέγεται <u>αριθμητικός μέσος</u> των α και γ.

<u>Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου</u>

Αποδεικνύεται ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_\nu\right)$$

Πιο αναλυτικά μπορούμε να γράψουμε:

$$\boxed{S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + \left(\nu - 1\right)\omega\right]}$$

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος:

$$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$$

Α. Να βρείτε τον ν^{ο} όρο της προόδου.

Β. Να βρείτε τον 16^{ο} όρο της προόδου.

(Απ. Α. $\alpha_\nu = \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}$, Β. $\alpha_{16} = \frac{17}{2}$)

2. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 10, 13, 16, ...

Να βρείτε τον 21^{ο} όρο της προόδου.

(Απ. $\alpha_{21} = 70$)

3. Έστω μια αριθμητική πρόοδος για την οποία γνωρίζουμε ότι: α_4=-1 και α_7=5.

Να βρείτε τον 20^{ο} όρο της προόδου.

(Απ. $\alpha_{20} = 31$)

4. Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι αριθμοί: $2x+2, 4x-1, 5x$

να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Απ. $x = 4$)

5. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 30 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 910.

(Απ. 7, 10, 13)

6. Να βρείτε την τιμή του $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι αριθμοί: $x^3 - x^2 - 2, x^2 + 2x, 2x^3 - x$

να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Απ. $x = 2$)

7. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 33 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 440.

(Απ. 2, 11, 20)

8. Έστω ότι σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύουν τα παρακάτω:

$$\alpha_6=5 \quad \text{και} \quad S_{10}=40$$

Να βρείτε τα α_1 και ω.

(Απ. $\alpha_1=-5$, $\omega=2$)

9. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1=2$ και $\omega=3$.

Να υπολογίσετε το άθροισμα $S=\alpha_{20}+\alpha_{21}+\ldots+\alpha_{50}$.

(Απ. S=3224)

10. Αν ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $α_ν=3ν+4$, να αποδειχθεί ότι η ακολουθία αυτή αποτελεί αριθμητική πρόοδο και να βρεθούν ο πρώτος όρος της ($α_1$) και η διαφορά της (ω).

Υπόδειξη: Για να αποδείξετε ότι μια ακολουθία ($α_ν$) είναι αριθμητική πρόοδος αρκεί να αποδείξετε ότι η διαφορά $α_{ν+1}-α_ν$ είναι σταθερός αριθμός (ανεξάρτητος του ν).

(Απ. $α_1=7$, $ω=3$)

11. Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου της οποίας ο πρώτος όρος είναι η μικρότερη ρίζα και η διαφορά είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης: $x^2-4x+3=0$.

(Απ. $α_1=1$, $α_2=4$, $α_3=7$, $α_4=10$, $α_5=13$)

12. Ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $α_ν=3ν+2$.

Α. Να βρείτε τον επόμενο όρο $α_{ν+1}$.

Β. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

Δ. Να βρείτε την τάξη του όρου που ισούται με 62.

(Απ. Α. $α_{ν+1}=3ν+5$, Γ. $S_{20}=670$, Δ. $ν=20$)

13. Α. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου 1, 5, 9, ... ισούται με 285;

Β. Πόσοι όροι αυτής της προόδου έχουν άθροισμα 19900;

(Απ. Α. $α_{72}$, Β. $ν=100$)

ΘΕΩΡΙΑ

Γεωμετρική Πρόοδος

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **γεωμετρική πρόοδος,** αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενό του με πολλαπλασιασμό επί τον ίδιο πάντοτε μη μηδενικό αριθμό.

Τον αριθμό αυτό τον συμβολίζουμε με **λ** και τον λέμε λόγο της προόδου.

Σε μια γεωμετρική πρόοδο $(α_ν)$ υποθέτουμε πάντα ότι $α_1 \neq 0$, οπότε αφού είναι και $λ \neq 0$, ισχύει $α_ν \neq 0$ για κάθε $ν \in \mathbb{N}^*$. Επομένως, η ακολουθία $(α_ν)$ είναι γεωμετρική πρόοδος με λόγο λ, αν και μόνο αν ισχύει:

$$\boxed{α_{ν+1} = α_ν \cdot λ}$$

ή

$$\boxed{\frac{α_{ν+1}}{α_ν} = λ}$$

Αποδεικνύεται ότι:

Ο $ν^{ος}$ όρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο $α_1$ και λόγο λ είναι
$$α_ν = α_1 \cdot λ^{ν-1}$$

Γεωμετρικός Μέσος

Αποδεικνύεται ότι:

Τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, αν και μόνο αν ισχύει $β^2 = αγ$

Ο θετικός αριθμός **β=**$\sqrt{αγ}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των α και γ.

<u>Άθροισμα ν διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου</u>

Αποδεικνύεται ότι:

Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου $(α_ν)$ με λόγο $λ \neq 1$ είναι

$$S_ν = α_1 \cdot \frac{λ^ν - 1}{λ - 1}$$

→ <u>Προσοχή</u>:

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που ο λόγος της προόδου είναι $λ = 1$, τότε το άθροισμα των όρων της είναι $S_ν = ν \cdot α_1$, αφού όλοι οι όροι της προόδου είναι ίσοι με $α_1$.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τον $8^{ο}$ όρο της γεωμετρικής προόδου:

$$1, 2, 4, \dots$$

(Απ. $α_8=2^7=128$)

2. Να βρείτε τον αριθμό α έτσι ώστε οι αριθμοί α, 6 και 9 να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

(Απ. α=4)

3. Έστω ότι ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με 2 και ο $7^{ος}$ είναι ίσος με $\frac{1}{32}$. Να βρεθεί η πρόοδος καθώς και ο $20^{ος}$ όρος της.

(Απ. $α_1=2$, $λ=\frac{1}{2}$, $α_{20}=\frac{1}{2^{18}}$)

4. Να βρείτε τρεις αριθμούς που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 21 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 216.

(Απ. 3, 6, 12)

5. Να βρείτε τον πρώτο όρο $α_1$ της γεωμετρικής προόδου για την οποία γνωρίζουμε ότι $α_3=12$ και $α_5=48$.

(Απ. $α_1=3$)

6. Έστω μια γεωμετρική πρόοδος $α_ν$ με λόγο τον ακέραιο λ και πρώτο όρο τον πραγματικό $α_1$. Αν ισχύει ότι: $α_1+α_2=6$ και $α_1+α_2+α_3=14$, τότε:

Α. να αποδείξετε ότι $α_1 \neq 0$ και $λ \neq 1$.

Β. να βρείτε τον $α_7$.

(Απ. Β. $α_7=2^7=128$)

7. Έστω η γεωμετρική πρόοδος:

$$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-\frac{1}{8},...$$

Α. Να βρείτε τον 12^{ο} όρο.

Β. Να βρείτε τον νιοστό όρο.

Γ. Να βρείτε το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της.

Δ. Να βρείτε ποιος όρος της είναι ίσος με $-\frac{1}{512}$.

(Απ. Α. $α_{12}=-\frac{1}{2^{11}}$, Β. $α_ν=\left(-\frac{1}{2}\right)^{ν-1}$, Γ. $S_5=\frac{11}{16}$, Δ. $α_{10}$)

8. Σε μία γεωμετρική πρόοδο ($α_ν$) είναι γνωστό ότι:

$$α_4=12 \quad \text{και} \quad α_9=384$$

Α. Να βρείτε την πρόοδο και το άθροισμα των 7 πρώτων όρων της.

Β. Πόσοι όροι της προόδου έχουν άθροισμα 1534.5;

(Απ. Α. $α_1=\frac{3}{2}$, λ=2, $S_7=190.5$, Β. ν=10)

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στη σελ. 125)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών α και γ είναι ο αριθμός $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

Β. Ο θετικός αριθμός $\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ λέγεται γεωμετρικός μέσος των αριθμών α και γ.

Γ. Αν για μια ακολουθία (α_ν) ισχύει ότι $\alpha_\nu - \alpha_{\nu+1} = 4$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$, τότε η (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\omega = 4$.

Δ. Αν οι αριθμοί $x-4, x+4, 3x-4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου (α_ν), τότε $x = 8$.

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών α και γ είναι ο αριθμός $\beta = \dfrac{\alpha-\gamma}{2}$.

Β. Ο ν-οστός όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$.

Γ. Αν οι αριθμοί $x-6, x-2, 2x+2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $x = 4$ ή $x = -1$.

Δ. Ο αριθμητικός μέσος δύο αντίθετων αριθμών είναι το μηδέν.

3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ο αριθμητικός μέσος των αριθμών -12 και 12 είναι ο αριθμός μηδέν.

Β. Ο $5^{ος}$ όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = 3\nu + 2$ είναι ο αριθμός 14.

Γ. Ο $31^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου: 1,4,7, … είναι ο αριθμός 91.

Δ. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) μπορεί να ισχύει $\alpha_6 = 5$ και $S_{11} = 50$.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η ακολουθία: 3, 6, 8, 10, 11, … δεν είναι αριθμητική πρόοδος.

Β. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_{10} = 2$ και $\omega = 3$ τότε το α_1 είναι ίσο με 5.

Γ. Ο ν-οστός όρος α_ν μιας γεωμετρικής προόδου με λόγο λ είναι $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$.

Δ. Η ακολουθία: 2, 5, 8, 11, … είναι γεωμετρική πρόοδος.

5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Στη γεωμετρική πρόοδο: 100, 50, 25, … ο λόγος λ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

Β. Η ακολουθία με $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu$ είναι γεωμετρική πρόοδος.

Γ. Η γεωμετρική πρόοδος: 4, 8, 16, 32, … έχει $S_\nu = 4(2^\nu - 1)$.

Δ. Σε μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 20$ και $\lambda = \frac{1}{2}$ είναι $S_\nu = 40$.

6. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Στη γεωμετρική πρόοδο: 18, -9, $\frac{9}{2}$, $-\frac{9}{4}$, … ο λόγος λ είναι ίσος με $\frac{1}{2}$.

Β. Ο 3^{ος} όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^\nu - 1}$ είναι ο αριθμός $\frac{1}{14}$.

Γ. Σε μία αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = -1$ και $\omega = 4$ το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + ... + \alpha_{51}$ είναι ίσο με 2574.

Δ. Η γεωμετρική πρόοδος: 2, 6, 18, … έχει $\alpha_\nu = 2 \cdot 3^{\nu-1}$.

7. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Σε μία γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 4$ και $\lambda = 2$ είναι $\alpha_\nu = 2\nu + 2$.

Β. Οι αριθμοί 7, 14, 21 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Γ. Ο αριθμός 25 είναι γεωμετρικός μέσος των αριθμών 5 και 45.

Δ. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_5 = 14$ και $\alpha_{12} = 42$ τότε είναι $\alpha_1 = -2$.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ο ν-οστός όρος της αριθμητικής προόδου: 7, 10, 13, … είναι $\alpha_\nu = 3\nu + 5$.

Β. Ο γενικός όρος της ακολουθίας $\alpha_\nu = |5\nu - 1| - |5\nu + 1|$ είναι $\alpha_\nu = -2$.

Γ. Ο 3^{ος} όρος της ακολουθίας $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 3$, $\alpha_1 = 1$ είναι ο αριθμός 7.

Δ. Για την ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{15}{\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_\nu < \alpha_{\nu+1}$.

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Αν η διαφορά μιας αριθμητικής προόδου είναι η μεγαλύτερη ρίζα και ο πρώτος της όρος η μικρότερη ρίζα της εξίσωσης $x^2-5x+6=0$, τότε ο 3^{ος} όρος της προόδου είναι ο αριθμός 8.

Β. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_1=3$ και $\alpha_5=23$ τότε η διαφορά ω είναι ίση με 5.

Γ. Αν σε μια αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1=3$ και διαφορά $\omega=4$ έχουμε $\alpha_\nu=35$, τότε το πλήθος ν των όρων της είναι 8.

Δ. Το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda\neq 1$ δίνεται από τον τύπο: $S_\nu=\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$.

10. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Ο 10^{ος} όρος της αριθμητικής προόδου: 10, 7, 4, … είναι ο αριθμός -17.

Β. Η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu=3\nu+2$ είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω ίση με 2.

Γ. Η αριθμητική πρόοδος: $\alpha,\alpha+2c,\alpha+4c,...$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $c>0$.

Δ. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου: $\alpha+\beta,\alpha,\alpha-\beta,...$ είναι β.

ΠΡΟΟΔΟΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄ (Α-Β-Γ-Δ)
1. Σ-Σ-Λ-Σ
2. Λ-Σ-Λ-Σ
3. Σ-Λ-Σ-Λ
4. Σ-Λ-Σ-Λ
5. Σ-Σ-Σ-Λ
6. Λ-Λ-Σ-Σ
7. Λ-Λ-Λ-Σ
8. Λ-Σ-Σ-Λ
9. Σ-Σ-Λ-Σ
10. Σ-Λ-Σ-Λ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

Η έννοια της συνάρτησης

Ορισμός

Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β.

Το σύνολο **Α** λέγεται πεδίο ορισμού ή σύνολο ορισμού της f.

- ✓ Αν με μια συνάρτηση f από το Α στο Β, το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε: $y = f(x)$
  και διαβάζουμε '**y ίσον** f **του x**'. Το $f(x)$ λέγεται τότε **τιμή της** f **στο x**.
  - x → ανεξάρτητη μεταβλητή
  - y → εξαρτημένη μεταβλητή

Το σύνολο, που έχει για στοιχεία του τις τιμές $f(x)$ για όλα τα $x \in A$, λέγεται σύνολο τιμών της f και το συμβολίζουμε με $f(A)$.

Η παραπάνω συνάρτηση συμβολίζεται ως εξής:

$$f : A \to B$$

$$x \to f(x)$$

Συντομογραφία Συνάρτησης

Γενικά, για να οριστεί μια συνάρτηση f πρέπει να δοθούν τρία στοιχεία:

→ Το πεδίο ορισμού της Α. → Το σύνολο Β. → Το $f(x)$ για κάθε $x \in A$.

- ➢ Οι συναρτήσεις, της μορφής $f : A \to B$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ και $B \subseteq \mathbb{R}$, λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής.**

ΘΕΩΡΙΑ

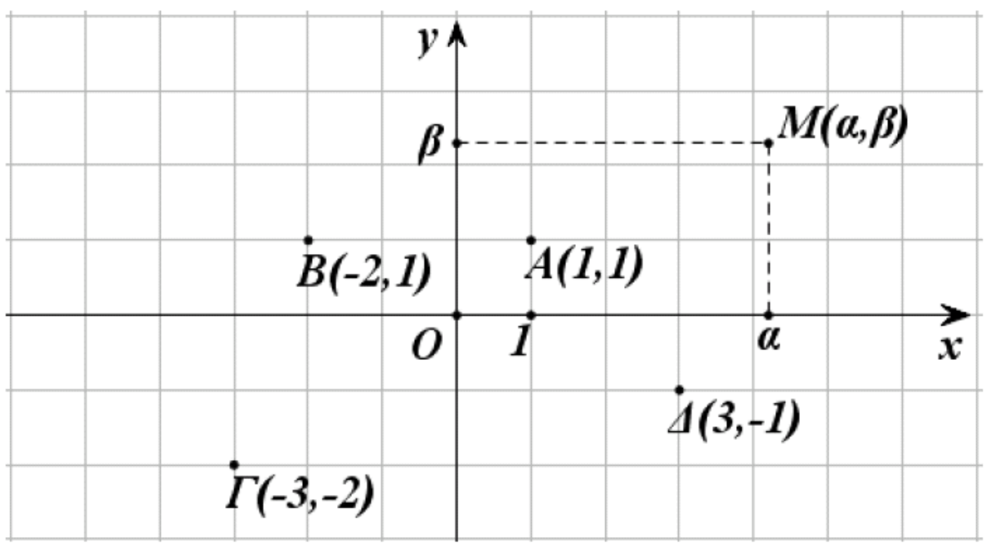
Γραφική παράσταση συνάρτησης

Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Πάνω σε ένα επίπεδο σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y με κοινή αρχή ένα σημείο O.

- Ο οριζόντιος x΄x λέγεται άξονας των τετμημένων ή άξονας των x.
- Ο κατακόρυφος y΄y λέγεται άξονας των τεταγμένων ή άξονας των y.

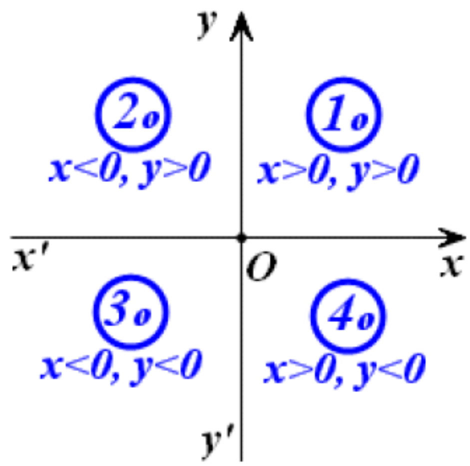
Σε κάθε σημείο M του επιπέδου των αξόνων μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών και αντίστροφα, σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος (α, β) πραγματικών αριθμών, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα μοναδικό σημείο M του επιπέδου.



- **α, β** → συντεταγμένες του σημείου M
- **α** → τετμημένη του σημείου M
- **β** → τεταγμένη του σημείου M

Οι άξονες χωρίζουν το επίπεδο σε τέσσερα τεταρτημόρια

- Τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνονται στο σχήμα:



Απόσταση Σημείων

Αν Oxy είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία αυτού, τότε αποδεικνύεται ότι η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο:

$$\boxed{(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Γραφική παράσταση συνάρτησης

Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού Α και Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το σύνολο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει $y = f(x)$, δηλαδή το σύνολο των σημείων $\mathrm{M}(x, f(x))$, $x \in \mathrm{A}$, λέγεται γραφική παράσταση της f και συμβολίζεται συνήθως με C_f.

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

Α. $f(x)=\dfrac{5}{x-1}$

Β. $f(x)=\dfrac{5x}{x^2-4}$

Γ. $f(x)=\dfrac{3}{x^2+5}$

Δ. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{x-5}$

Ε. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

ΣΤ. $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

Ζ. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}-\{1\}$, Β. $x\in\mathbb{R}-\{\pm2\}$, Γ. $x\in\mathbb{R}$, Δ. $x\in[5,+\infty)$,

Ε. $x\in(-\infty,-3]\cup[3,+\infty)$, ΣΤ. $x\in(-\infty,1]\cup[2,+\infty)$, Ζ. $x\in(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$)

2. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση:

$$f(x)=\sqrt{x^2-16}+\frac{x^2+3x-4}{x-2}$$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(4)$ και $f(5)$.

(Απ. Α. $x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$, Β. $f(0)\rightarrow$ δεν ορίζεται, $f(4)=12$, $f(5)=15$)

3. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{2}{x+1}+3$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι: $f(x)=2$.

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}-\{-1\}$, Β. $x=-3$)

4. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\dfrac{x+1}{x^2-3x}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει ότι: $g(x)=-1$.

(Απ. Α. $x\in\mathbb{R}-\{0,3\}$, Β. $x=1$)

5. Να σημειώσετε σε ένα καρτεσιανό επίπεδο τα σημεία:

Α(2, 3), Β(-1, 2), Γ(-2, -1), Δ(3, -2) και Ε($\dfrac{1}{2}$, 3).

6. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Α(-2, 1):

Α. ως προς τον άξονα x΄x.

Β. ως προς τον άξονα y΄y.

Γ. ως προς την αρχή Ο των αξόνων.

Δ. ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

(Απ. Α. Α΄(-2, -1), Β. Α΄(2, 1), Γ. Α΄(2, -1), Δ. Α΄(1, -2))

7. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:

Α. Ο(0, 0) και Α(5, 3)

Β. Α(2, 1) και Β(-1, 3)

Γ. Α(-1, -3) και Β(1, 4)

Δ. Α(1, -1) και Β(-2, -5)

(Απ. Α. $\sqrt{34}$, Β. $\sqrt{13}$, Γ. $\sqrt{53}$, Δ. 5)

8. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το σημείο Μ(1, 3) ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης: $f(x) = x^2 + \lambda x + 3\lambda$.

(Απ. $\lambda = \frac{1}{2}$)

9. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση: $f(x) = x^2 - 4$.

Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

(Απ. Α(0, -4), Β(-2, 0), Γ(2, 0))

10. Δίνονται οι παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = x^2 - 5x + 10 \quad \text{και} \quad g(x) = 3x - 6$$

Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g.

(Απ. Α(4, 6))

11. Δίνεται η παρακάτω συνάρτηση: $f(x)=x^3-7x^2+6x$.

Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

(Απ. Ο(0, 0), Α(1, 0), Β(6, 0))

12. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{|x-2|-5}$$

(Απ. $\mathrm{A}_f=(-\infty,-3]\cup[7,+\infty)$)

13. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-4}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

Γ. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=1$.

(Απ. Α. $\mathrm{A}_f=\mathbb{R}-\{\pm 2\}$, Β. $f(x)=\dfrac{x^2}{x+2}$, Γ. $f(0)=0$, Δ. $x=-1$)

14. Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\geq 0 \\ -x^2+7, & x<0 \end{cases}$

Α. Να βρείτε τις τιμές $f(-3)$ και $f(1)$.

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

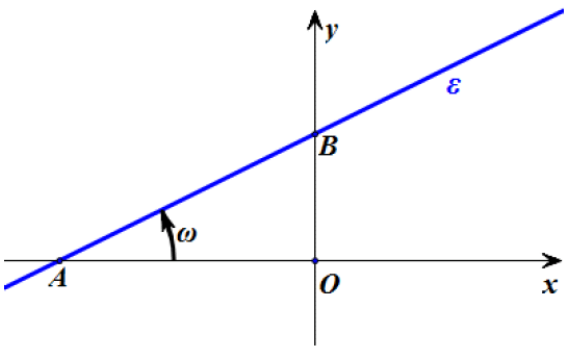
(Απ. Α. $f(-3)=-2$, $f(1)=-3$, Β. $x=4$ ή $x=-2$)

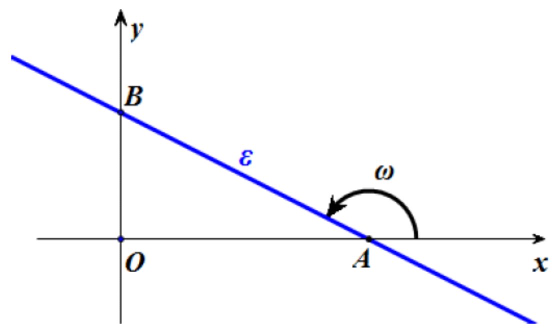
<u>ΘΕΩΡΙΑ</u>

Η συνάρτηση: $f(x)=\alpha x+\beta$

<u>Συντελεστής Διεύθυνσης Ευθείας</u>

Έστω Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Α.





- Τη γωνία **ω** που διαγράφει η ημιευθεία Αx, όταν στραφεί γύρω από το Α κατά τη θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία ε, τη λέμε **γωνία που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x**.
- Σε κάθε περίπτωση για τη γωνία ισχύει: $\mathbf{0^o \le \omega \le 180^o}$.

Ως <u>συντελεστή διεύθυνσης</u> ή ως <u>κλίση</u> μιας ευθείας ε ορίζουμε την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x΄x.

→ Ο συντελεστής διεύθυνσης συμβολίζεται με: $\boldsymbol{\lambda_\varepsilon}$ ή **λ**.

<u>Προσοχή:</u> Στην περίπτωση που είναι $\mathbf{\omega=90^o}$, δηλαδή η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα x΄x, τότε **<u>δεν ορίζεται</u>** ο συντελεστής διεύθυνσης της ε.

<u>Γραφική Παράσταση της Συνάρτησης:</u> $f(x)=\alpha x+\beta$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x+\beta$ είναι μια ευθεία, με εξίσωση $y=\alpha x+\beta$, η οποία τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Β(0, β) και έχει κλίση $\lambda=\alpha$.

Ισχύουν τα παρακάτω:

- ✓ Αν $\alpha > 0$, τότε $0^o < \omega < 90^o$
- ✓ Αν $\alpha < 0$, τότε $90^o < \omega < 180^o$
- ✓ Αν $\alpha=0$, τότε $\omega = 0^o$

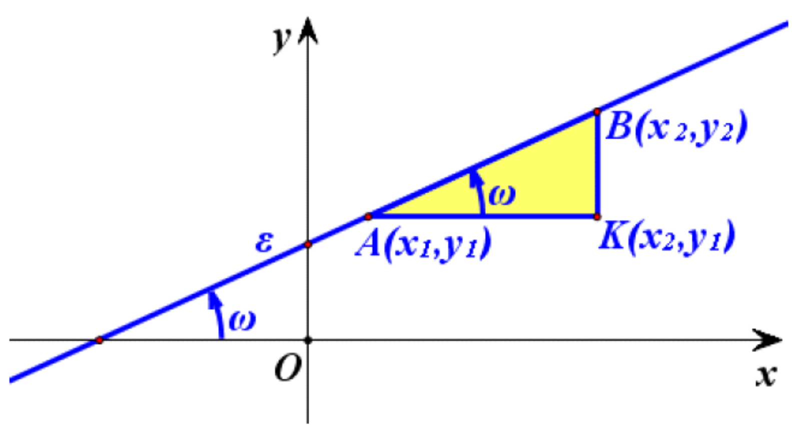
Αν α=0, τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή:

$$f(x)=\beta$$

(σταθερή συνάρτηση)

Για δύο τυχαία σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ αποδεικνύεται ότι:

$$\boxed{\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

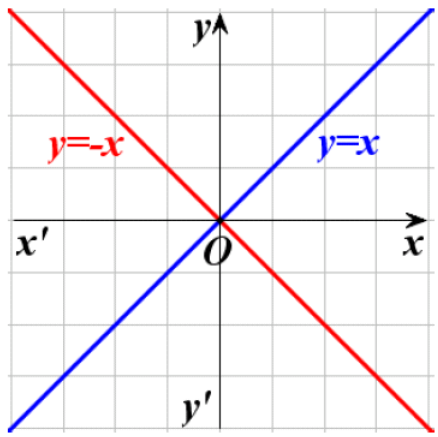


Η συνάρτηση: $f(x) = \alpha x$

Αν β=0, τότε η f παίρνει τη μορφή: $f(x) = \alpha x$.

Τότε η γραφική παράσταση της f είναι η ευθεία $y = \alpha x$ και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

- Για α=1 είναι: $y = x$
- Για α=-1 είναι: $y = -x$



Σχετικές θέσεις δύο ευθειών

Έστω δύο ευθείες ε_1 και ε_2 με εξισώσεις:

$$\varepsilon_1:\ y = \alpha_1 x + \beta_1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2:\ y = \alpha_2 x + \beta_2$$

οι οποίες σχηματίζουν με τον άξονα x΄x γωνίες ω_1 και ω_2 αντιστοίχως.

- Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 = \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.

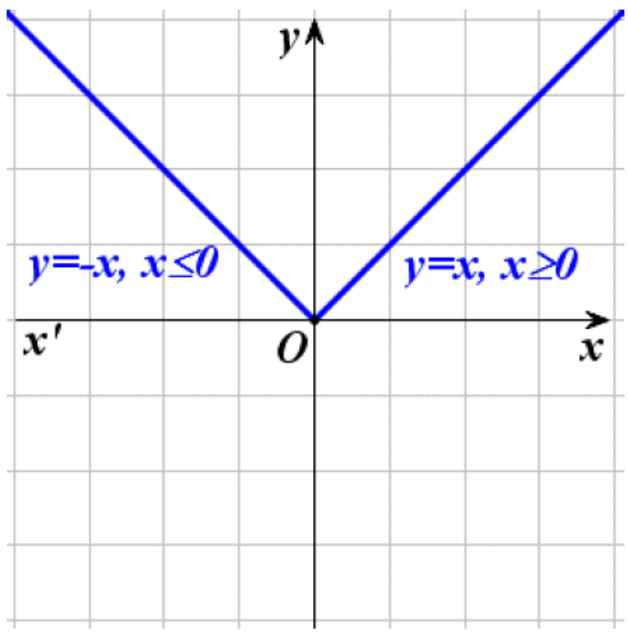
  - Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 \neq \beta_2$ τότε οι ευθείες είναι παράλληλες.
  - Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ και $\beta_1 = \beta_2$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

- Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$ τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 \neq \varepsilon\varphi\omega_2$, οπότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και άρα οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται.

<u>Η συνάρτηση:</u> $f(x)=|x|$

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε:

$$f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & \text{αν } x<0\\ x, & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$$



ΘΕΩΡΙΑ

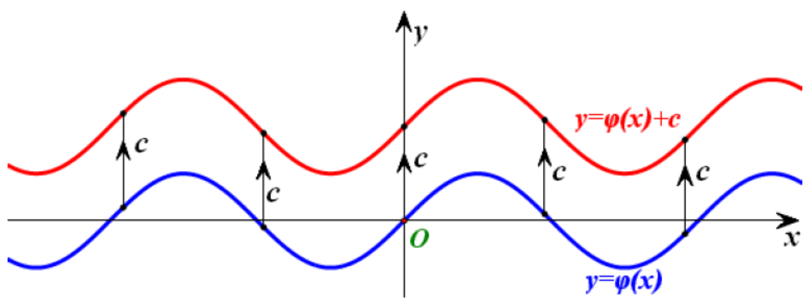
Κατακόρυφη – Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Κατακόρυφη Μετατόπιση Καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x)+c,\ \text{όπου } c>0,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα πάνω** (Σχήμα α΄)

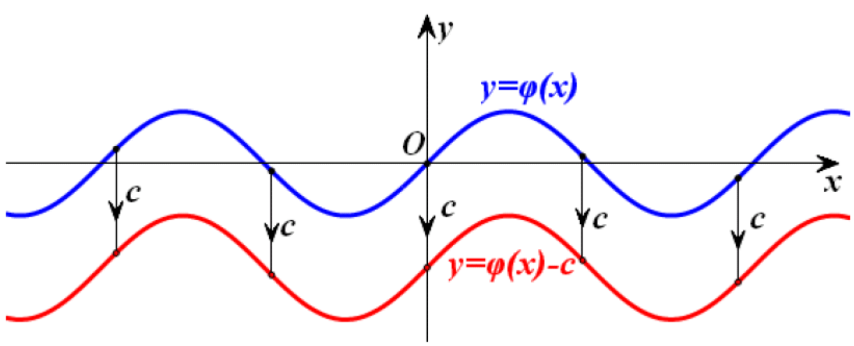


Σχήμα α΄

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, με:

$$f(x)=\varphi(x)-c,\ \text{όπου } c>0,$$

προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα κάτω** (Σχήμα β΄)



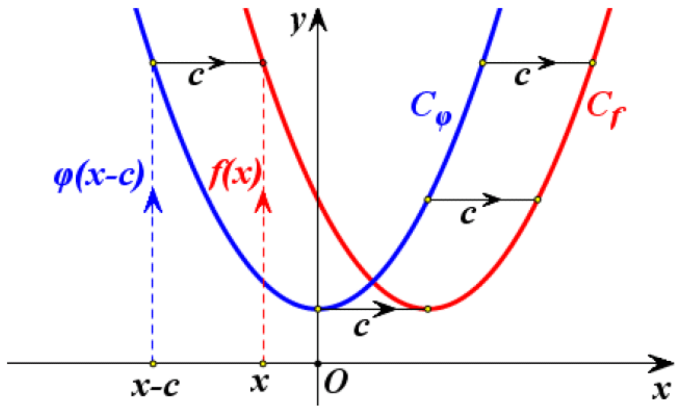
Σχήμα β΄

Οριζόντια Μετατόπιση Καμπύλης

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με:

$$f\left(x\right)=\varphi\left(x-c\right),\ \text{όπου}\ \ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα δεξιά** (Σχήμα γ΄).

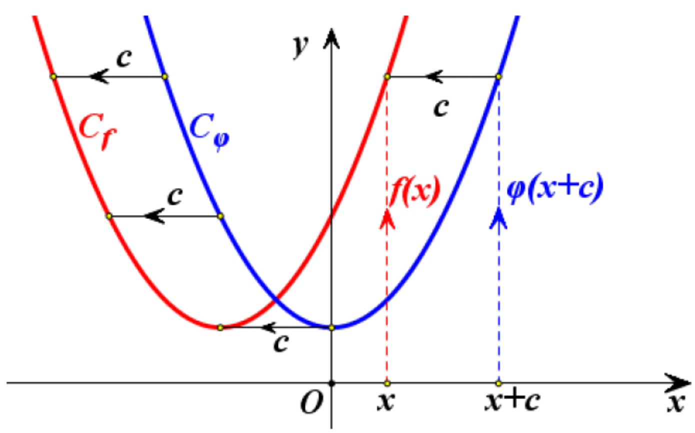


Σχήμα γ΄

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , με:

$$f\left(x\right)=\varphi\left(x+c\right),\ \text{όπου}\ \ c>0\ ,$$

προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της φ κατά c μονάδες **προς τα αριστερά** (Σχήμα δ΄).



Σχήμα δ΄

ΑΛΥΤΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x΄x η ευθεία:

Α. $y = x + 1$

Β. $y = \sqrt{3}x + 1$

Γ. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

Δ. $y = -x + 5$

(Απ. Α. $\omega = 45^o$, Β. $\omega = 60^o$, Γ. $\omega = 30^o$, Δ. $\omega = 135^o$)

2. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

Α. Α(1, 2) και Β(-1, 3)

Β. Α(-1, 3) και Β(2, 3)

Γ. Α(1, 1) και Β(5, 7)

Δ. Α(3, 2) και Β(-4, 2)

(Απ. Α. $\lambda = -\frac{1}{2}$, Β. $\lambda = 0$, Γ. $\lambda = \frac{3}{2}$, Δ. $\lambda = 0$)

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση $\alpha = -2$ και διέρχεται από το σημείο Β(1, 2).

(Απ. $y = -2x + 4$)

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα παρακάτω σημεία:

Α. Α(2, 3) και Β(1, 2)

Β. Α(-1, 2) και Β(3, 6)

Γ. Α(1, 1) και Β(5, 7)

Δ. Α(-2, -3) και Β(-1, 4)

Ε. Α(1, -2) και Β(-2, 4)

ΣΤ. Α(5, 8) και Β(1, 3)

(Απ. Α. $y = x + 1$, Β. $y = x + 3$, Γ. $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, Δ. $y = 7x + 11$, Ε. $y = -2x$,

ΣΤ. $y = \frac{5}{4}x + \frac{7}{4}$)

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -3x + 2$ και διέρχεται από το σημείο Α(2, -1).

(Απ. $y = -3x + 5$)

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που σχηματίζει γωνία 45^o με τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο Α(-2, 4).

(Απ. $y = x + 6$)

7. Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Α(-1, 4) και Β(-3, 0), ενώ η ευθεία ζ είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο Γ(-2, -3). Να βρείτε τις εξισώσεις των ε και ζ.

(Απ. ε: $y = 2x + 6$, ζ: $y = 2x + 1$)

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=|x|$ και έστω Α και Β τα σημεία της C_f με τετμημένες -3 και 5 αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β, καθώς και την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

(Απ. Α(-3, 3), Β(5, 5), ε: $y=\frac{1}{4}x+\frac{15}{4}$)

9. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|, \quad f(x)=|x|+3, \quad g(x)=|x|-3$$

10. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|, \quad f(x)=|x+3|, \quad g(x)=|x-3|$$

11. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$\varphi(x)=|x|, \quad f(x)=|x+3|+2, \quad g(x)=|x-3|-2$$

12. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

Α. $f(x)=\begin{cases} x-5, & x>2 \\ -2x+1, & x\leq 2 \end{cases}$ Β. $g(x)=\begin{cases} x-4, & x\leq -2 \\ 2, & -2<x<3 \\ -2x+8, & x\geq 3 \end{cases}$

13. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

Α. $f(x)=2|x-1|-4$ Β. $g(x)=2-|x+1|$ Γ. $h(x)=-\frac{1}{4}|x+4|+2$

ΘΕΩΡΙΑ

Μονοτονία – Ακρότατα – Συμμετρίες Συνάρτησης

Μονοτονία Συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2)$$

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \uparrow \Delta$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha > 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$f(x_1) > f(x_2)$$

- Για να δηλώσουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ γράφουμε $f \downarrow \Delta$.
- Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$, με $\alpha < 0$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

→ Γενικά, μια συνάρτηση που είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ.

Ελάχιστο και Μέγιστο Συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **ελάχιστο** όταν:

$$f\left(x\right) \geq f\left(x_0\right), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

- Το $x_o \in A$ λέγεται **θέση ελαχίστου**
- Το $f(x_o)$ λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της f $(\min f(x))$

Ορισμός

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) **μέγιστο** όταν

$$f\left(x\right) \leq f\left(x_0\right), \quad \text{για κάθε } x \in A$$

- Το $x_o \in A$ λέγεται **θέση μεγίστου**
- Το $f(x_o)$ λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της f $(\max f(x))$

→ Το (ολικό) μέγιστο και το (ολικό) ελάχιστο μιας συνάρτησης λέγονται **ολικά ακρότατα** αυτής.

Άρτια Συνάρτηση

Ορισμός

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **άρτια,** όταν για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει:

$$-x \in \mathrm{A} \quad \text{και} \quad f(-x) = f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y

Περιττή Συνάρτηση

Ορισμός

Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α, θα λέγεται **περιττή,** όταν για κάθε $x \in \mathrm{A}$ ισχύει:

$$-x \in \mathrm{A} \quad \text{και} \quad f(-x) = -f(x)$$

- Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων

<u>ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄</u>

(Οι απαντήσεις των ερωτήσεων βρίσκονται στη σελ. 149)

1. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η συνάρτηση $f(x)=x^4+2x^2$ είναι περιττή.

Β. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x-2}$ είναι $A_f=[2,+\infty)$.

Γ. Η απόσταση των σημείων Α(2, 4) και Β(5, 8) είναι (ΑΒ)=$2\sqrt{5}$.

Δ. Η ευθεία $y=5x+10$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 10).

2. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η ευθεία $y=3x-2$ έχει συντελεστή διεύθυνσης α=3.

Β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\alpha x$ είναι μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ. Η ευθεία $y=-2x+1$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x.

Δ. Το σημείο Α(1, 3) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=3x-1$.

3. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η ευθεία $y=\alpha x+\beta$, με $\alpha>0$ σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

Β. Το σημείο Μ(x, y) με x<0 και y<0 βρίσκεται στο 3^{o} τεταρτημόριο.

Γ. Η συνάρτηση $f(x)=x^3+3x$ είναι περιττή.

Δ. Η ευθεία $y=-4$ έχει συντελεστή διεύθυνσης α=0.

4. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Οι ευθείες ε_1: $y=-4x+7$ και ε_2: $y=2x+5$ είναι παράλληλες.

Β. Η ευθεία $y=(2\lambda-6)x+\lambda-2$ είναι παράλληλη στον άξονα x΄x όταν $\lambda=3$.

Γ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{9-3x}$ είναι $A_f=[3,+\infty)$.

Δ. Για την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}$ είναι $f(6)=2$.

5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Το συμμετρικό του σημείου Α(-4, 7) ως προς την αρχή των αξόνων είναι το σημείο Α΄(4, -7).

Β. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει: αν $x_1 < x_2$, τότε $f(x_1) > f(x_2)$.

Γ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ είναι $A_f=[-3,3]$.

Δ. Η συνάρτηση $f(x)=x^2+4x+4$ παρουσιάζει στο -2 ελάχιστο το $f(-2)=0$.

6. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(-1, 4) και Β(3, 8), σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega=45^o$.

Β. Τα σημεία Α(κ, λ) και Β(-κ, λ) είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x.

Γ. Το σημείο Μ(-4, 5) βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο.

Δ. Το σημείο Μ(2, 3) ανήκει στη γραφική παράσταση της f, αν και μόνο αν ισχύει ότι $f(3)=2$.

7. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Οι ευθείες ε$_1$: $y=-\frac{\sqrt{8}}{2}x+7$ και ε$_2$: $y=-\sqrt{2}x+9$ είναι παράλληλες.

Β. Αν για την συνάρτηση $f(x)=x^2+\alpha$ ισχύει ότι $f(-3)=6$ τότε είναι $\alpha=-2$.

Γ. Ο άξονας x΄x έχει εξίσωση y=0.

Δ. Η ευθεία με εξίσωση y=3 έχει συντελεστή διεύθυνσης α=3.

8. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της $f(x)=|3-2x|-7$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x είναι (-2, 3).

Β. Η ευθεία με εξίσωση y=3x-2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=x^2-4x+3$ είναι το $\mathbb{R}$.

Δ. Το σημείο Μ(-4, -5) βρίσκεται στο 4$^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο.

9. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x+2)+f(3x-2)-5x+8=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε είναι $f(4)=4$.

Β. Ο άξονας y΄y έχει εξίσωση x=0.

Γ. Για την συνάρτηση $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3}{8}}$ είναι $f(3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Δ. Αν Oxy είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο και $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ δύο σημεία αυτού, τότε η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο: $(\text{AB})=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$.

10. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις:

Α. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=2x-5$ και $g(x)=x-4$ τέμνονται στο σημείο Α(1, -3).

Β. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=|x-1|+3$ είναι $\mathrm{A}_f=[1,+\infty)$.

Γ. Αν η ευθεία $y=\alpha x+\beta$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα x΄x, τότε η εξίσωση $|x+1|=-\alpha$ είναι αδύνατη.

Δ. Οι ευθείες ε_1: $y=-\dfrac{1}{2}x+3$ και ε_2: $y=2x+5$ είναι κάθετες.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΄ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ΄ (Α-Β-Γ-Δ)
1. Λ-Σ-Λ-Σ
2. Σ-Σ-Λ-Λ
3. Λ-Σ-Σ-Σ
4. Λ-Σ-Λ-Σ
5. Σ-Λ-Σ-Σ
6. Σ-Λ-Λ-Λ
7. Σ-Λ-Σ-Λ
8. Λ-Λ-Σ-Λ
9. Λ-Σ-Σ-Λ
10. Σ-Λ-Σ-Σ

ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΘΕΩΡΙΑ

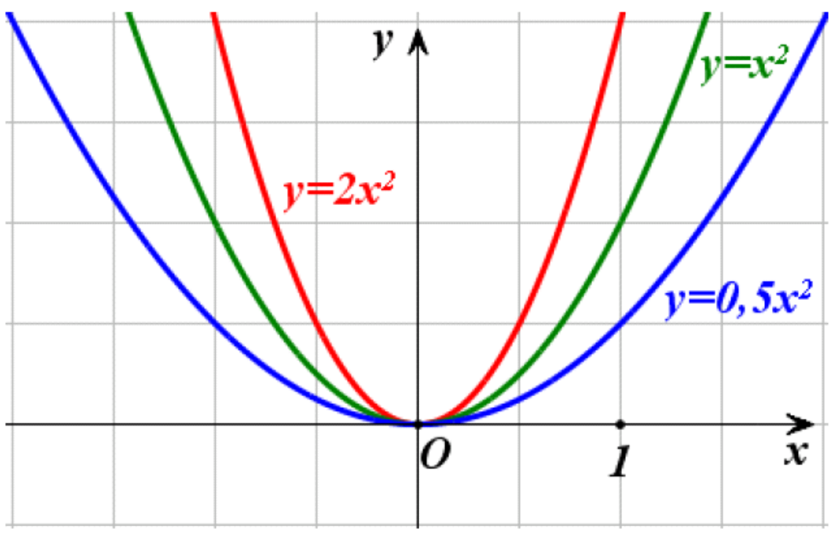
Η Συνάρτηση: $f(x) = \alpha x^2$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Αν $\alpha > 0$ έχουμε:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2$ $\alpha > 0$	$+\infty$	$\searrow$	0 **min**	$\nearrow$	$+\infty$

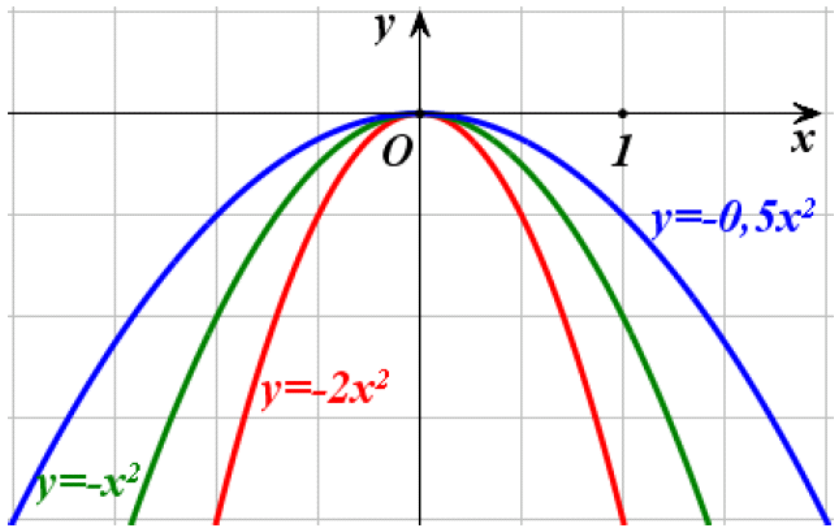
Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = 0{,}5$, $\alpha = 1$ και $\alpha = 2$.



- Αν $\alpha < 0$ έχουμε:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = \alpha x^2$ $\alpha < 0$	$-\infty$ ↗	**max** **0**	↘ $-\infty$

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x) = \alpha x^2$ για $\alpha = -0,5$, $\alpha = -1$ και $\alpha = -2$.



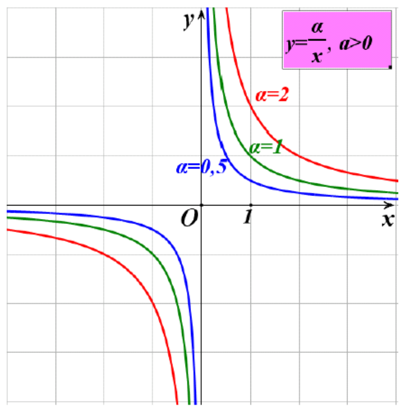
→ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$, με $\alpha \neq 0$, είναι μια καμπύλη που λέγεται <u>παραβολή</u> με <u>κορυφή</u> την αρχή των αξόνων και <u>άξονα συμμετρίας</u> τον άξονα y΄y.

ΘΕΩΡΙΑ

Η Συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$

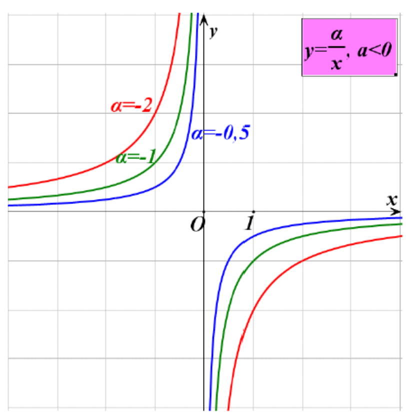
- $\alpha>0$

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$ για $\alpha=0,5$, $\alpha=1$ και $\alpha=2$.



- $\alpha<0$

Οι γραφικές παραστάσεις της $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$ για $\alpha=-0,5$, $\alpha=-1$ και $\alpha=-2$.



→ Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$, με $\alpha\neq 0$, λέγεται <u>ισοσκελής υπερβολή</u> με <u>κέντρο</u> την αρχή Ο(0,0) και <u>ασύμπτωτες</u> τους άξονες x΄x και y΄y.

ΘΕΩΡΙΑ

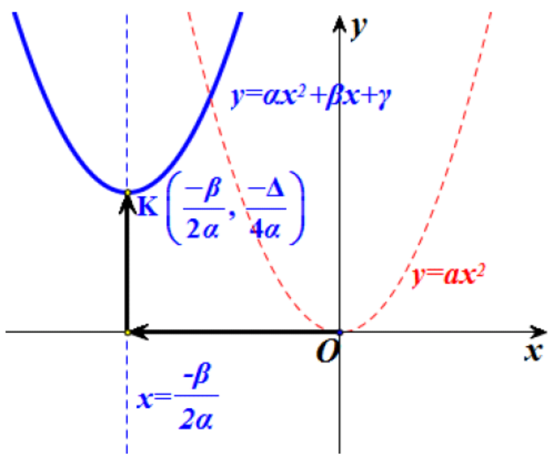
Η Συνάρτηση: $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

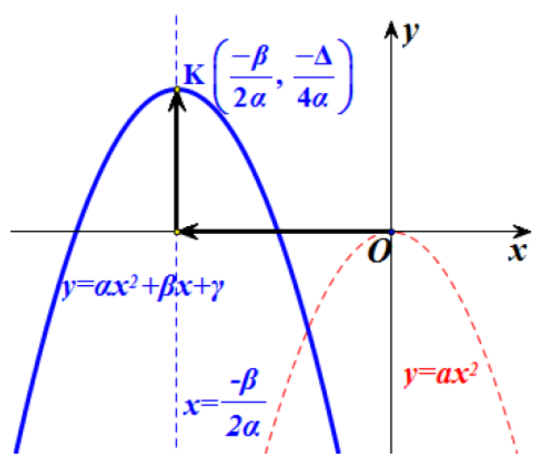
Η γραφική παράσταση της $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με $\alpha\neq 0$ είναι μια **παραβολή**, που έχει **κορυφή** το σημείο:

$$\mathrm{K}\left(-\frac{\beta}{2\alpha},-\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$$

και **άξονα συμμετρίας** την ευθεία:

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}$$





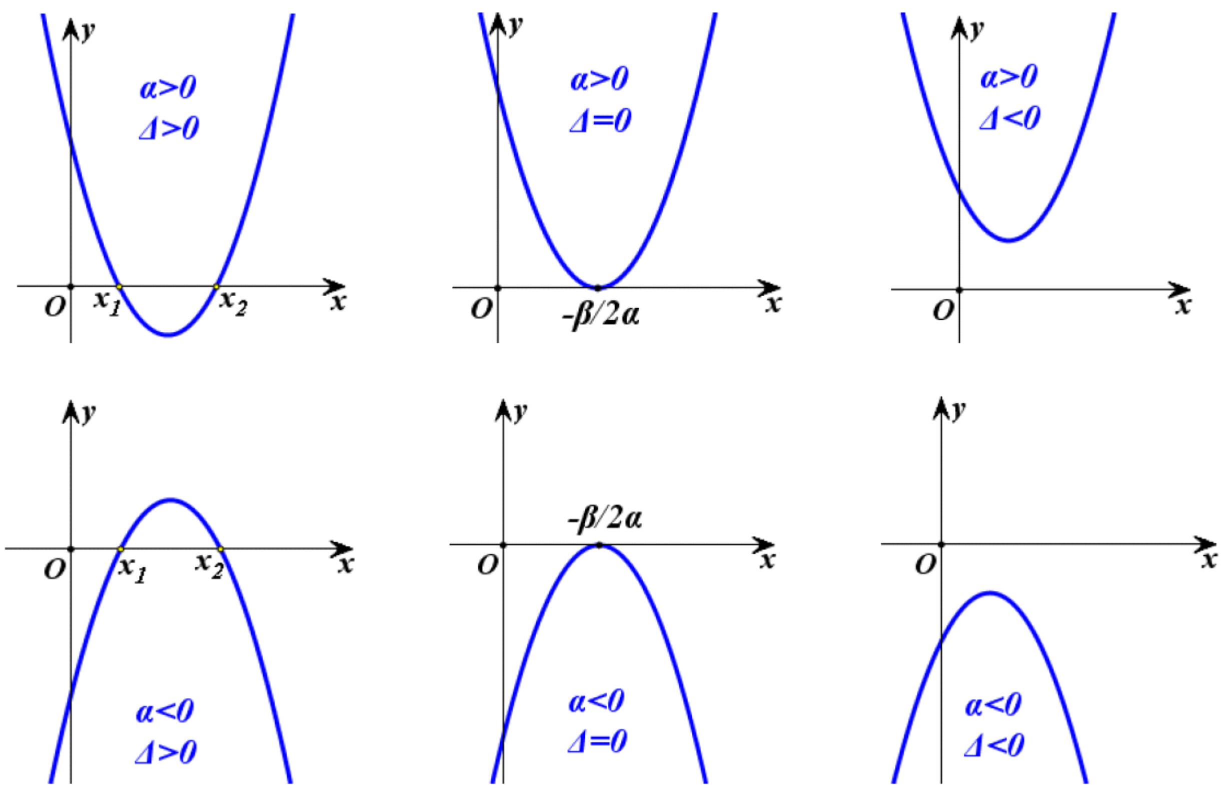
- Αν $\alpha>0$ έχουμε:

x	$-\infty$ $\qquad \frac{-\beta}{2\alpha} \qquad$ $+\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha>0$	$+\infty \searrow \underset{\min}{\frac{-\Delta}{4\alpha}} \nearrow +\infty$

➢ Αν $\alpha<0$ έχουμε:

x	$-\infty$ $\qquad \dfrac{-\beta}{2\alpha}$ $\qquad +\infty$
$f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $\alpha<0$	$-\infty \nearrow$ $\dfrac{-\Delta}{4\alpha}$ max $\searrow -\infty$

✓ Η γραφική παράσταση της f εξαρτάται από το πρόσημο των α και Δ και φαίνεται κατά περίπτωση στα σχήματα που ακολουθούν:



ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Σχετικά

Παρακάτω μπορείτε να βρείτε επιλεγμένα θέματα της Τράπεζας Θεμάτων Διαβαθμισμένης Δυσκολίας (ΤΘΔΔ) σε όλη την ύλη της Άλγεβρας της Α΄ Τάξης του Γενικού Λυκείου όπως διαμορφώθηκαν από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής για τις προαγωγικές εξετάσεις του σχολικού έτους 2014-15. Τα θέματα αυτά μπορούν να αποτελέσουν ένα χρήσιμο βοήθημα για τη μελέτη του μαθήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Η εξέταση σε ένα διαγωνισμό των Μαθηματικών περιλάμβανε δύο θέματα τα οποία έπρεπε να απαντήσουν οι εξεταζόμενοι. Για να βαθμολογηθούν με άριστα έπρεπε να απαντήσουν και στα δύο θέματα, ενώ για να περάσουν την εξέταση έπρεπε να απαντήσουν σε ένα τουλάχιστον από τα δύο θέματα. Στο διαγωνισμό εξετάστηκαν 100 μαθητές. Στο $1^{\text{ο}}$ θέμα απάντησαν σωστά 60 μαθητές. Στο $2^{\text{ο}}$ θέμα απάντησαν σωστά 50 μαθητές, ενώ και στα δύο θέματα απάντησαν σωστά και οι 30 μαθητές. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

Α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας συνόλων (ορίζοντας τα κατάλληλα ενδεχόμενα) τα παραπάνω δεδομένα.

Β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ο μαθητής:

Ι. Να απάντησε σωστά μόνο στο $2^{\text{ο}}$ θέμα.

ΙΙ. Να βαθμολογηθεί με άριστα.

ΙΙΙ. Να μην απάντησε σωστά σε κανένα θέμα.

ΙV. Να πέρασε την εξέταση.

(Απ. Β. Ι. 0.2, ΙΙ. 0.3, ΙΙΙ. 0.2, ΙV. 0.8)

2. Σε ένα τμήμα της Α Λυκείου, κάποιοι μαθητές παρακολουθούν μαθήματα αγγλικών και κάποιοι γαλλικών. Η πιθανότητα ένας μαθητής να μην παρακολουθεί γαλλικά είναι 0.8. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί αγγλικά είναι τετραπλάσια από την πιθανότητα να παρακολουθεί γαλλικά. Η πιθανότητα ένας μαθητής να παρακολουθεί τουλάχιστον μια από τις δύο γλώσσες είναι 0.9.

Α. Επιλέγουμε έναν μαθητή στην τύχη.

Ι. Ποια η πιθανότητα να παρακολουθεί μαθήματα και των δύο γλωσσών;

ΙΙ. Ποια η πιθανότητα να παρακολουθεί μαθήματα μόνο μιας από τις δύο γλώσσες;

Β. Αν 14 μαθητές παρακολουθούν μόνο αγγλικά, πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος;

(Απ. Α. Ι. 0.1, ΙΙ. 0.8, Β. 20)

3. Οι δράστες μιας κλοπής διέφυγαν με ένα αυτοκίνητο και μετά από την κατάθεση διαφόρων μαρτύρων έγινε γνωστό ότι ο τετραψήφιος αριθμός της πινακίδας του αυτοκινήτου είχε $1^{ο}$ και $4^{ο}$ ψηφίο το 2. Το $2^{ο}$ ψηφίο ήταν 6 ή 8 ή 9 και το $3^{ο}$ ψηφίο ήταν 4 ή 7.

Α. Με χρήση δενδροδιαγράμματος, να προσδιορίσετε το σύνολο των δυνατών αριθμών της πινακίδας του αυτοκινήτου.

Β. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: Το $3^{ο}$ ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι το 7.

Β: Το $2^{ο}$ ψηφίο του αριθμού της πινακίδας είναι 6 ή 8.

Γ: Το $2^{ο}$ ψηφίο του αριθμού της πινακίδας δεν είναι ούτε 8 ούτε 9.

(Απ. Α. Ν(Ω)=6, Β. $p(\text{Α})=\frac{1}{2}$, $p(\text{Β})=\frac{2}{3}$, $p(\Gamma)=\frac{1}{3}$)

4. Σε μια ομάδα που αποτελείται από 7 άνδρες και 13 γυναίκες, 4 από τους άνδρες και 2 από τις γυναίκες παίζουν σκάκι. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα άτομα αυτά.

Α. Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και με χρήση της γλώσσας συνόλων το ενδεχόμενο το άτομο που επιλέχτηκε:

Ι. να είναι άνδρας ή να παίζει σκάκι.

ΙΙ. να μην είναι άνδρας και να παίζει σκάκι.

Β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα το άτομο που επιλέχτηκε να είναι γυναίκα και να παίζει σκάκι.

(Απ. Β. 0.1)

5. Από μια έρευνα μεταξύ μαθητών ενός Λυκείου της χώρας, προέκυψε ότι το 80% των μαθητών πίνει γάλα ή τρώει 2 φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι στο σπίτι το πρωί. Επιλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη και ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

Α: ο μαθητής πίνει γάλα.

Β: ο μαθητής τρώει 2 φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι.

Αν από το σύνολο των μαθητών το 60% πίνει γάλα και το 45% τρώει 2 φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι

Α. Να ορίσετε με χρήση της γλώσσας συνόλων τα ενδεχόμενα:

Ι. ο μαθητής ούτε να πίνει γάλα ούτε να τρώει 2 φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι.

ΙΙ. ο μαθητής να πίνει γάλα και να τρώει 2 φέτες ψωμί με βούτυρο και μέλι.

ΙΙΙ. ο μαθητής να πίνει μόνο γάλα.

Β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης των ενδεχομένων του ερωτήματος Α.

(Απ. Β. Ι. $p[(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})']=0.2$ ΙΙ. $p(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0.25$, ΙΙΙ. $p(\mathrm{A}-\mathrm{B})=0.35$)

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f.

Γ. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

(Απ. Α. $\mathrm{A}_f=\mathbb{R}-\{3\}$, Β. $f(x)=x-2$, Γ. Α(0, -2), Β(2, 0))

7. Δύο φίλοι αποφάσισαν να κάνουν το χόμπι τους δουλειά. Τους άρεσε να ζωγραφίζουν μπλουζάκια και έστησαν μια μικρή επιχείρηση για να τα πουλήσουν μέσω διαδικτύου. Τα έξοδα κατασκευής (σε ευρώ) για x μπλουζάκια δίνονται από τη συνάρτηση: $K(x)=12.5x+120$,

και τα έσοδα από την πώλησή τους (σε ευρώ), σε διάστημα ενός μηνός, από την συνάρτηση: $E(x)=15.5x$.

Α. Ποια είναι τα πάγια έξοδα της επιχείρησης;

Β. Τι εκφράζει ο αριθμός 12.5 και τι ο αριθμός 15.5 στο πλαίσιο του προβλήματος;

Γ. Να βρείτε πόσα μπλουζάκια πρέπει να πουλήσουν ώστε να έχουν έσοδα όσα και έξοδα (δηλαδή να μην μπαίνει μέσα η επιχείρηση).

Δ. Αν πουλήσουν 60 μπλουζάκια θα έχουν κέρδος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Απ. Α. 120 ευρώ, Β. Ο αριθμός 12.5 εκφράζει τα έξοδα κατασκευής για ένα μπλουζάκι, ενώ ο αριθμός 15.5 εκφράζει τα έσοδα από την πώλησή του (σε ευρώ), Γ. 40 μπλουζάκια, Δ. Θα έχουν κέρδος 60 ευρώ.)

8. Α. Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$

Β. Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

$$x^2+y^2-2x+6y+10=0$$

(Απ. Β. $x=1, y=-3$)

9. Ένας αθλητής κολυμπάει ύπτιο και καίει 9 θερμίδες το λεπτό, ενώ όταν κολυμπάει πεταλούδα καίει 12 θερμίδες το λεπτό. Ο αθλητής θέλει κολυμπώντας να κάψει 360 θερμίδες.

Α. Αν ο αθλητής θέλει να κολυμπήσει ύπτιο 32 λεπτά, πόσα λεπτά πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει συνολικά 360 θερμίδες;

Β. Ο αθλητής αποφασίζει πόσο χρόνο θα κολυμπήσει ύπτιο και στη συνέχεια υπολογίζει πόσο χρόνο πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες.

Ι. Αν x είναι ο χρόνος σε λεπτά που ο αθλητής κολυμπάει ύπτιο, να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζει το χρόνο που πρέπει να κολυμπήσει πεταλούδα για να κάψει 360 θερμίδες είναι $f(x)=30-\frac{3}{4}x$.

ΙΙ. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης του ερ. Β. (Ι), στο πλαίσιο του συγκεκριμένου προβλήματος.

Γ. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης του ερ. Β, να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες και να ερμηνεύσετε τη σημασία τους στα πλαίσια του προβλήματος.

(Απ. Α. 6 λεπτά, Β. ΙΙ. $A_f=[0,40]$, Γ. Α(0, 30), Β(40, 0))

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α.

Β. Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$.

Γ. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in \mathrm{A}$ ισχύει $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$.

(Απ. Α. $\mathrm{A}=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$, Β. $2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$)

11. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$ (1)

Α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1\cdot x_2$ των ριζών.

Γ. Αν $\lambda<0$, τότε:

Ι. Το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε.

ΙΙ. Να δείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2\cdot x_1\cdot x_2$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου.

(Απ. Α. $\Delta=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, Β. $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $P=1$, Γ. Ι. Το τριώνυμο έχει αρνητικές ρίζες.)

12. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x)=\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda>0$

Α. Να βρείτε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει θετικές ρίζες για κάθε $\lambda>0$.

Β. Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

Ι. Να βρείτε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

ΙΙ. Να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να δείξετε ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$.

ΙΙΙ. Για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Απ. Α. $\Delta=(\lambda^2-1)^2\geq 0$, $S>0$, $P>0$, Β. Ι. Ε=1, ΙΙ. Π=$2\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $\lambda>0$, ΙΙΙ. Προκύπτει τετράγωνο πλευράς 1.)

13. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \quad \text{και} \quad g(x)=\alpha x-5 \quad \text{με} \quad \alpha\in\mathbb{R}$$

Α. Αν $f(2)=g(2)$ να βρείτε την τιμή του α.

Β. Για $\alpha=1$

Ι. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.

ΙΙ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\geq g(x)$ και με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

(Απ. Α. $\alpha=1$, Β. Ι. $x=2, x=3$, ΙΙ. $x\in(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$)

14. Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει 4 διαφορετικές πραγματικές ρίζες τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Απ. $\pm\sqrt{3}$, ± 2)

15. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

Α. Να βρείτε τις ρίζες του.

Β. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

Γ. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

(Απ. Α. 1, $\frac{1}{2}$, Β. $x \in (\frac{1}{2}, 1)$, Γ. Οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης.)

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 1,\ x \in \mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι η C_f δεν τέμνει τον x΄x.

Β. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

Γ. Έστω $\text{Μ}(x, y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει $|2x - 1| < 3$ τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = 2x + 3$.

(Απ. Β. $x \in (-1, 2)$)

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με

$$f(x)=x^2-2x,\ g(x)=3x-4,\ x\in\mathbb{R}.$$

Α. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f, g.

Β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κάτω από την C_g.

Γ. Να δείξετε ότι κάθε ευθεία της μορφής $y=\alpha$, $\alpha<-1$ βρίσκεται κάτω από την C_f.

(Απ. Α. Α(1, -1), Β(4, 8), Β. $x\in(1,4)$)

18. Δίνεται η εξίσωση

$$(x-2)^2=\lambda(4x-3) \text{ με παράμετρο } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Α. Να γράψετε την εξίσωση στην μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$.

Β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες,

Ι. να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$.

ΙΙ. να δείξετε ότι η παράσταση $\mathrm{A}=(4x_1-3)\cdot(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Απ. Α. $x^2+(-4\lambda-4)x+(3\lambda+4)=0$, Β. $\lambda\in(-\infty,-\frac{5}{4})\cup(0,+\infty)$, Γ. Ι. $S=4\lambda+4$, $P=3\lambda+4$, ΙΙ. $\mathrm{A}=25$)

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

Α. Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$.

Β. Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

(Απ. Α. -43, Β. Α(0, -15), Β(-5, 0), Γ(3, 0))

20. Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε όταν εισάγεται σ' αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x, να δίνει ως εξαγόμενο τον λ ο οποίος δίνεται:

$$\lambda=(2x+5)^2-8x \quad (1)$$

Α. Αν ο εισαγόμενος αριθμός είναι το -5, ποιος είναι ο εξαγόμενος;

Β. Αν ο εξαγόμενος αριθμός είναι το 20, ποιος μπορεί να είναι ο εισαγόμενος;

Γ. Να γράψετε την (1) στην μορφή $4x^2+12x+(25-\lambda)=0$ και στη συνέχεια:

Ι. Να δείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος x, ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5.

ΙΙ. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές του εξαγόμενου αριθμού λ.

(Απ. Α. 65, Β. $-\frac{1}{2}$, $-\frac{5}{2}$, Γ. ΙΙ. $\lambda\geq 16$)

21. Α. Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$.

Β. Να σχηματίσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Α.

(Απ. Α. $x=2+\sqrt{3}$, $x=2-\sqrt{3}$, Β. $x^2-4x+1=0$)

22. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + 1 = 0 \quad (1) \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Α. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες;

Β. Να δείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της (1) τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της (1).

Γ. Για $\lambda > 2$ να δείξετε ότι:

Ι. Οι ρίζες x_1, x_2 της (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ΙΙ. $x_1 + 4x_2 \geq 4$

(Απ. Α. $\lambda \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, Γ. Ι. $S > 0$, $P > 0$)

23. Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \in \mathbb{R}$ με ρίζες τους αριθμούς 1 και 2.

Α. Να δείξετε ότι $\gamma = 2\alpha$, $\beta = -3\alpha$.

Β. Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι το τριώνυμο παίρνει θετικές τιμές για κάθε $x \in (1, 2)$ τότε:

Ι. Να δείξετε ότι $\alpha < 0$.

ΙΙ. Να λυθεί η ανίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha < 0$.

(Απ. Β. ΙΙ. $x \in (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$)

24. Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta\cdot x^2-(\alpha^2+\beta^2)\cdot x+\alpha\beta=0$, όπου α,β δύο θετικοί αριθμοί.

Α. Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta=(\alpha^2-\beta^2)^2$.

Β. Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α,β ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, τις οποίες και να προσδιορίσετε ως συνάρτηση των α,β.

Γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$ και $x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$ τότε να δείξετε ότι $(1+x_1)\cdot(1+x_2)\geq 4$.

(Απ. Β. $(\alpha^2-\beta^2)^2>0$, $x_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$, $x_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$)

25. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2=0$ και $\alpha_4=4$.

Α. Να δείξετε ότι $\omega=2$ και $\alpha_1=-2$ όπου ω η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της.

Β. Να δείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu=2\nu-4$, $\nu\in\mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98.

(Απ. Β. $\alpha_{51}=98$)

26. Αν ο πραγματικός x ικανοποιεί τη σχέση $|x+1|<2$.

Α. Να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$.

Β. Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Απ. Β. $K=1$)

27. Αν ένας κάτοικος μιας πόλης Α καταναλώσει x κυβικά νερού σε ένα χρόνο, το ποσό που θα πρέπει να πληρώσει δίνεται (σε ευρώ) από τη συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}12+0.5\cdot x, & 0\le x\le 30\\ 0.7\cdot x+6, & x>30\end{cases}$$

Α. Να βρείτε πόσα ευρώ θα πληρώσει όποιος:

Ι. Έλειπε από το σπίτι του και δεν είχε καταναλώσει νερό.

ΙΙ. Έχει καταναλώσει 10 κυβικά μέτρα νερού.

ΙΙΙ. Έχει καταναλώσει 50 κυβικά μέτρα νερού.

Β. Σε μια άλλη πόλη Β το ποσό (σε ευρώ) που αντιστοιχεί στην κατανάλωση x κυβικών μέτρων, δίνεται από τον τύπο:

$$g(x)=12+0.6\cdot x,\ x\ge 0$$

Ένας κάτοικος της πόλης Α και ένας κάτοικος της πόλης Β κατανάλωσαν τα ίδια κυβικά νερού, για το 2013. Αν ο κάτοικος της πόλης Α πλήρωσε μεγαλύτερο ποσό στο λογαριασμό του από τον κάτοικο της πόλης Β, να δείξετε ότι ο κάθε ένας από τους δύο κατανάλωσε περισσότερα από 60 κυβικά μέτρα νερού.

(Απ. Α. Ι. 12 ευρώ, ΙΙ. 17 ευρώ, ΙΙΙ. 41 ευρώ)

28. Α. Να λύσετε την ανίσωση $x^2-5x-6<0$.

Β. Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K=\left(-\dfrac{46}{47}\right)^2+5\cdot\dfrac{46}{47}-6$ και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

Γ. Αν $\alpha\in(-6,6)$ να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda=\alpha^2-5|\alpha|-6$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Απ. Α. $x\in(-1,6)$, Β. $K<0$, Γ. $\Lambda<0$)

29. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με λόγο λ για την οποία ισχύει:

$$\alpha_3 = 4,\ \alpha_5 = 16,\ \lambda > 0$$

Α. Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της προόδου.

Β. Να δείξετε ότι η ακολουθία (β_ν) με (β_ν)=$\dfrac{1}{\alpha_\nu}$ αποτελεί επίσης γεωμετρική πρόοδο με λόγο τον αντίστροφο του λόγου της (α_ν).

Γ. Αν S_{10} και $S_{10}^{'}$ είναι τα αθροίσματα των 10 πρώτων όρων των προόδων (α_ν) και (β_ν) αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $S_{10}^{'} = \dfrac{1}{2^9}\cdot S_{10}$.

(Απ. Α. $\alpha_1 = 1,\ \lambda = 2$, Β. $\beta_1 = 1,\ \lambda = \dfrac{1}{2}$)

30. Α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4| < 2$.

Β. Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

Ι. Να δείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

ΙΙ. Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19.

(Απ. Α. $x \in (2,6)$, Β. ΙΙ. $1 < d(3x,19) < 13$)

31. Σε αριθμητική πρόοδο είναι

$$\alpha_2 = \kappa^2,\ \alpha_3 = (\kappa+1)^2$$

όπου κ ακέραιος, $\kappa > 1$.

Α. Να δείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι αριθμός περιττός.

Β. Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1 = 2$, τότε:

Ι. Να βρείτε τον αριθμό κ και να δείξετε ότι ω=7.

ΙΙ. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1017 είναι όρος της προόδου.

(Απ. Α. $\omega = 2\kappa + 1$ → περιττός, Β. Ι. $\kappa = 3$, ΙΙ. $\alpha_{146} = 1017$)

32. Α. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2 + 2x + 3 = \alpha$$

με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ι. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = \alpha$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

ΙΙ. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε.

Β. Δίνεται το τριώνυμο:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3,\ x \in \mathbb{R}$$

Ι. Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΙΙ. Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x) - 2} \leq 2$.

(Απ. Α. Ι. $\alpha > 2$, ΙΙ. $\alpha = 2$, $x = -1$, Β. ΙΙ. $x \in [-3, 1]$)

33. Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Α. Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1 \cdot x_2$ των ριζών.

Γ. Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ. Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου να δείξετε ότι:

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} \leq \frac{x_1+x_2}{2}$$

(Απ. Α. $\Delta=(\lambda^2-1)^2 \geq 0$, Β. $S=\dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $P=1$, Γ. Οι ρίζες του τριωνύμου είναι θετικές.)

34. Α. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π=34 cm και διαγώνιο δ=13 cm.

Ι. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του είναι Ε=60 cm^2.

ΙΙ. Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

ΙΙΙ. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Β. Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο ίση με 8 cm.

(Απ. Α. ΙΙ. $\omega^2-17\omega+60=0$, ΙΙΙ. 12 cm, 5 cm, Β. Δεν υπάρχει.)

35. Για την ενοικίαση ενός συγκεκριμένου τύπου αυτοκινήτου για μια ημέρα, η εταιρεία Α χρεώνει τους πελάτες της σύμφωνα με τον τύπο $y = 60 + 0.2x$, όπου x η απόσταση που διανύθηκε σε χλμ και y το ποσό χρέωσης σε ευρώ.

Α. Τι ποσό θα πληρώσει ένας πελάτης της εταιρείας Α, ο οποίος σε μια ημέρα ταξίδεψε 400 χλμ.

Β. Πόσα χλμ οδήγησε ένας πελάτης, ο οποίος για μια ημέρα πλήρωσε 150 ευρώ;

Γ. Μια άλλη εταιρεία Β χρεώνει τους πελάτες της ανά ημέρα, σύμφωνα με τον τύπο $y = 80 + 0.1x$, όπου x η απόσταση που διανύθηκε σε χλμ και y το ποσό χρέωσης σε ευρώ. Να εξετάσετε ποια από τις δύο εταιρείες μας συμφέρει να επιλέξουμε, ανάλογα με την απόσταση που θέλουμε να διανύσουμε.

Δ. Αν $f(x) = 60 + 0.2x$ και $g(x) = 80 + 0.1x$ είναι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τον τρόπο χρέωσης των εταιρειών Α και Β αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f και C_g και να εξηγήσετε τι εκφράζει κάθε μια από αυτές τις συντεταγμένες σε σχέση με το πρόβλημα του ερωτήματος Γ.

(Απ. Α. 140 ευρώ, Β. 450 χλμ, Γ. Για απόσταση x<200 χλμ συμφέρει να επιλέξουμε την εταιρεία Α (χρεώνει λιγότερο) ενώ για απόσταση x>200 χλμ συμφέρει να επιλέξουμε την εταιρεία Β (χρεώνει λιγότερο), Δ. (200, 100) → Για απόσταση 200 χλμ ακριβώς και οι δύο εταιρείες Α και Β έχουν την ίδια χρέωση των 100 ευρώ.)

36. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1) με παράμετρο $\beta > 0$.

Α. Να δείξετε ότι η (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$, $x_2 = \dfrac{\beta}{2}$.

Β. Αν οι x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2 με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Απ. Β. Είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.)

37. Δίνονται οι εξισώσεις $x^2-3x+2=0$ (1) και $x^4-3x^2+2=0$ (2).

Α. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

Β. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

Γ. Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2+\beta x+\gamma=0$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

(Απ. Α. $x_1=1$, $x_2=2$, Β. ± 1, $\pm\sqrt{2}$, Γ. $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$)

38. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρών α, β και εμβαδόν Ε, τέτοια ώστε οι αριθμοί:

α, Ε, β

με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Α. Να δείξετε ότι Ε=1.

Β. Αν α+β=10 τότε:

Ι. Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τα μήκη α, β.

ΙΙ. Να βρείτε τα μήκη α, β.

(Απ. Β. Ι. $x^2-10x+1=0$, ΙΙ. $5\pm 2\sqrt{6}$)

39. Αν για τους πραγματικούς x, y ισχύει $3\le x\le 5$ και $-2\le y\le -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

Α. $y-x$

Β. x^2+y^2

(Απ. Α. $-7\le y-x\le -4$, Β. $10\le x^2+y^2\le 29$)

40. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{|2-x|}$.

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Β. Να δείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} x-3, & x>2 \\ -x+3, & x<2 \end{cases}$.

Γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f και να βρεθούν τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\le 0$.

(Απ. Α. $A_f=\mathbb{R}-\{2\}$, Δ. $x\in(2,3]$)

41. Στην Α τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται το γυμναστή του σχολείου που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος της απαντά με ένα πρόβλημα:

‘Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με x-1 μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε x+3 σειρές με x-3 μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής’.

Α. Να βρείτε την τιμή του x.

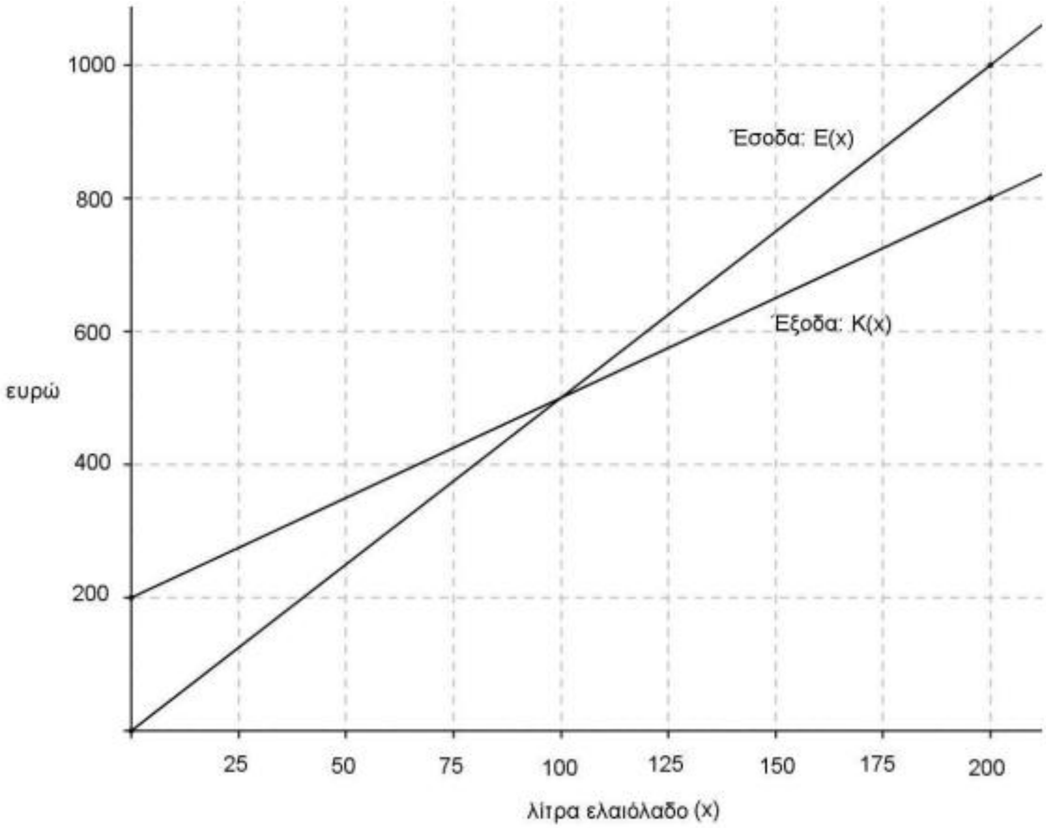
Β. Να δείξετε ότι η Α τάξη έχει 90 μαθητές.

Γ. Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω 90 μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην $1^η$ ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά.

Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες εργασίας θα δημιουργηθούν.

(Απ. Α. x=10, Γ. ν=9)

42.



Μια μικρή εταιρεία πουλάει βιολογικό ελαιόλαδο στο διαδίκτυο. Στο παραπάνω σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης που περιγράφει τα έξοδα $K(x)$ και $E(x)$ τα έσοδα από την πώληση x λίτρων λαδιού σε ένα μήνα.

Α. Να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών και να ερμηνεύσετε τη σημασία του.

Β. Ποια είναι τα αρχικά (πάγια) έξοδα της εταιρείας;

Γ. Πόσα λίτρα ελαιόλαδο πρέπει να πουλήσει η εταιρεία για να μην έχει ζημία;

Δ. Να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων $K(x)$ και $E(x)$ και να επαληθεύσετε αλγεβρικά την απάντηση του ερωτήματος Γ.

(Απ. Α. (100, 500) → Η εταιρεία όταν πουλάει 100 λίτρα ελαιόλαδο το μήνα έχει έσοδα όσα και έξοδα, Β. 200 ευρώ το μήνα, Γ. 100 λίτρα, Δ. $K(x)=3x+200$, $x\geq 0$, $E(x)=5x$, $x\geq 0$)

43. Δίνεται η συνάρτηση:

$$g(x)=\frac{(x^2-1)(x^2-4)}{x^2+\kappa x+\lambda}$$

η οποία έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}-\{-2,1\}$.

Α. Να βρείτε τις τιμές των κ,λ.

Β. Για $\kappa=1$, $\lambda=-2$

Ι. Να απλοποιήσετε τον τύπο της g.

ΙΙ. Να δείξετε ότι $g(\alpha)\cdot g(\beta)>0$ όταν $\alpha,\beta\in(-1,1)\cup(1,2)$.

(Απ. Α. $\kappa=1$, $\lambda=-2$, Β. Ι. $g(x)=x^2-x-2$)

44. Εξαιτίας ενός ατυχήματος σε διυλιστήριο πετρελαίου, διαρρέει στη θάλασσα πετρέλαιο που στο τέλος της 1ης ημέρας καλύπτει 3 τετραγωνικά μίλια (τ.μ.), στο τέλος της 2ης ημέρας καλύπτει 6 τ.μ., στο τέλος της 3ης ημέρας καλύπτει 12 τ.μ. και γενικά εξαπλώνεται έτσι, ώστε στο τέλος κάθε ημέρας να καλύπτει επιφάνεια διπλάσια από αυτήν που κάλυπτε την προηγούμενη.

Α. Να βρείτε την επιφάνεια της θάλασσας που θα καλύπτει το πετρέλαιο στο τέλος της 5ης ημέρας μετά το ατύχημα.

Β. Πόσες ημέρες μετά τη στιγμή του ατυχήματος το πετρέλαιο θα καλύπτει 768 τ.μ.;

Γ. Στο τέλος της 9ης ημέρας, επεμβαίνει ο κρατικός μηχανισμός και αυτομάτως σταματάει η εξάπλωση του πετρελαίου. Στο τέλος της επόμενης ημέρας, η επιφάνεια που καλύπτει το πετρέλαιο, έχει μειωθεί κατά 6 τ.μ. και συνεχίζει να μειώνεται κατά 6 τ.μ. την ημέρα. Να βρείτε πόσες ημέρες μετά από τη στιγμή του ατυχήματος, η θαλάσσια επιφάνεια που καλύπτεται από το πετρέλαιο θα περιοριστεί κατά 12 τ.μ.

(Απ. Α. α_5=48 τ.μ., Β. 9 ημέρες, Γ. 135 ημέρες)

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ

<u>Σχετικά</u>

Παρακάτω μπορείτε να βρείτε επιλεγμένα θέματα Ελληνικών και Διεθνών Διαγωνισμών Μαθηματικών που καλύπτουν ένα ευρύ φάσμα της ύλης της Α΄ Τάξης του Γενικού Λυκείου. Πρόκειται για <u>απαιτητικά θέματα</u> που διακρίνονται τόσο για την πρωτοτυπία όσο και τη διδακτική τους αξία και μπορούν να αποτελέσουν ένα χρήσιμο βοήθημα για τη μελέτη του μαθήματος.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ-ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ</u>

1. Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \leq \sqrt{\frac{\alpha^2}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha}}$$

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Θαλής» 1995)

2. Να βρείτε όλα τα ζευγάρια των φυσικών αριθμών $x, y \in \mathbb{N}$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$|x-2| + |y-3| = 3 - y$$

(Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά 1984)

(Απ. (x, y) = (2, 0) ή (2, 1) ή (2, 2) ή (2, 3))

3. Αν $\alpha + \beta + \gamma = \kappa$ και $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\kappa}$, τότε να δειχτεί ότι ένας απ' τους α, β, γ είναι ίσος με κ (όπου $\alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbb{R}^*$).

(Πανελλήνιος Μαθητικός Διαγωνισμός στα Μαθηματικά 1986)

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει ότι $xyz = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{1}{y + 1 - \frac{y}{x+1}} + \frac{1}{z + 1 - \frac{z}{y+1}} + \frac{1}{x + 1 - \frac{x}{z+1}}$$

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Θαλής» 2001)

(Απ. $K = 2$)

5. Να λυθεί η εξίσωση:

$$3(1+\alpha^2+\alpha^4)x = (1+\alpha+\alpha^2)^2 x + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha - 1$$

ως προς x θεωρώντας το α ως παράμετρο.

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Θαλής» 2001)

(Απ. Αν $\alpha \neq 1$ τότε $x = \dfrac{\alpha^2+\alpha+1}{2(\alpha-1)}$, Αν $\alpha = 1$ τότε $0x = 0$ (αόριστη))

6. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha = 2\beta + \alpha\beta - 4$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης $(2x-\alpha)^3 - (x-\beta)^3 - x^3 = 0$.

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Ευκλείδης» 2007)

(Απ. $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = 2$)

7. Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση:

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^2-\frac{1}{y^2}\right)^m\cdot\left(y+\frac{1}{x}\right)^{n-m}\cdot y^{m+n}}{\left(y^2-\frac{1}{x^2}\right)^n\cdot\left(x-\frac{1}{y}\right)^{m-n}\cdot x^{m+n}}$$

όπου m,n ακέραιοι και x,y πραγματικοί αριθμοί με $xy\neq 0$, $xy\neq 1$ και $xy\neq -1$.

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Ευκλείδης» 2008)

(Απ. $\mathrm{A}=1$)

8. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ($\alpha\neq\beta$) ισχύουν:

$$\alpha^2=2\beta+15 \text{ και } \beta^2=2\alpha+15$$

τότε να βρείτε την τιμή του $\alpha\beta$.

(16η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015)

(Απ. $\alpha\beta=-11$)

9. Δίνεται η συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(xy)=\frac{f(x)}{y}, \text{ για κάθε } x,y>0$$

Αν $f(40)=10$, τότε να βρείτε το $f(8)$.

(16η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα 2015)

(Απ. $f(8)=50$)

10. Αν $\alpha+\beta=\frac{1}{2}$ και $\alpha^2+\beta^2=1$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε την παράσταση: $\alpha^2\beta^2-\alpha\beta$.

(14η Κυπριακή Μαθηματική Ολυμπιάδα 2013)

(Απ. $\alpha^2\beta^2-\alpha\beta=\frac{33}{64}$)

11. Να βρείτε το υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο συναληθεύουν οι ανισώσεις: $\frac{x^2}{4}+\frac{|x|-1}{3}\le\frac{|x|+x^2}{4}$ και $\frac{x+1}{2}+\frac{x(x+1)}{4}>\frac{(x+2)^2}{4}$.

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Ευκλείδης» 2011)

(Απ. $x\in[-4,-2)$)

12. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4} \quad \text{και} \quad x(x^2+4)(x^2-5x+4)=0$$

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Ευκλείδης» 2012)

(Απ. $x=0$ ή $x=1$)

13. Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α η παράσταση $\mathrm{A}=(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-6)+10$ είναι πάντα θετική. Ποια είναι η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση A και για ποιες τιμές του α;

(3η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα 1986-1987)

(Απ. $\mathrm{A}=(\alpha^2-7\alpha+9)^2+1\ge1$, $\mathrm{A}_{\min}=1$ για $\alpha=\frac{1}{2}(7\pm\sqrt{13})$)

14. Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)(x^3-y^3)(x^3+y^3)}{(x^2-y^2)(x^4+y^4+x^2y^2)} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}$$

αν $y\neq \pm x$ και $2x+4y+5\neq 0$, και να λύσετε την εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$.

(Πανελλήνιος Διαγωνισμός «Ευκλείδης» 2012)

(Απ. $\mathrm{A}(x,y)=x^2+y^2$, $\mathrm{B}(x,y)=2x+4y-5$, $(x,y)=(1,2)$)

15. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2-2\cdot 2014\cdot x-\kappa^2-1$, $\kappa\in\mathbb{R}$.

Α. Να δείξετε ότι έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1, x_2 με $x_1<x_2$.

Β. Αποδείξτε ότι: $|x_1-2013|<|2013-x_2|$.

Γ. Υπολογίστε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=|2x_1-4\cdot 2014|-|x_2|-\sqrt{x_2^2-2x_2+1}$$

(Διαγωνισμός Β. Ξανθόπουλου 2014)

(Απ. Γ. $\mathrm{A}=1$)

16. Αν ένας αριθμός x αυξηθεί κατά y% γίνεται 30, ενώ αν αυξηθεί ο y κατά x% γίνεται 25. Να βρείτε τους αριθμούς x και y.

(Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία Παγκύπριος Διαγωνισμός 2013)

(Απ. x=25, y=20)

17. Α. Δίνεται η παράσταση $\mathrm{A}=\sqrt{3\lambda-\lambda^2}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ ορίζεται.

Β. Επίσης δίνεται το τριώνυμο $\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}-|\lambda|\right)x^2+2x+\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}+|\lambda|\right)$ με $\lambda\neq 0$. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες το τριώνυμο είναι θετικό για κάθε τιμή του x.

Γ. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ οι αριθμοί:

$$\left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}-|\lambda|\right),\ \sqrt{2},\ \left(\sqrt{3\lambda-\lambda^2}+|\lambda|\right)$$

είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Διαγωνισμός Β. Ξανθόπουλου 2013)

(Απ. Α. $\lambda\in[0,3]$, Β. $\lambda\in(\frac{1}{2},1)$, Γ. $\lambda=1$ ή $\lambda=2$)

18. Αν x_1,x_2 είναι ρίζες των εξισώσεων

$$x^2-\lambda x+\mu=0 \ (1) \text{ και } x^{4024}-\lambda^{2012}x^{2012}+\mu^{2012}=0 \ (2)$$

με $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\mu\neq 0$, να δείξετε ότι:

Α. $(x_1+x_2)^{2012}=x_1^{2012}+x_2^{2012}$.

Β. ο αριθμός $\frac{x_1}{x_2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $(\omega+1)^{2012}-\omega^{2012}-1=0$.

(Διαγωνισμός Β. Ξανθόπουλου 2012)

19. Α. Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

Β. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν $\begin{cases} x+y+z=6 \\ x^2+y^2+z^2=26 \\ x^3+y^3+z^3=90 \end{cases}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων $\mathrm{A}=xyz$ και $\mathrm{B}=x^4+y^4+z^4$.

(Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία Παγκύπριος Διαγωνισμός 2012)

(Απ. Β. $\mathrm{A}=-12$, $\mathrm{B}=338$)

20. Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $x+y=6$.

Α. Να δείξετε ότι: $xy\le 9$.

Β. Να αποδείξετε ότι: $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{y}\right)^2\ge\dfrac{200}{9}$.

(Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία Παγκύπριος Διαγωνισμός 2013)

21. Έστω ότι έχουμε

$$(1+\alpha)(1+\beta)=12 \text{ και } \alpha\beta(\alpha+\beta)=30$$

με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης:

$$x^2-2\alpha\beta x-(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-1)=0$$

(Διαγωνισμός Β. Ξανθόπουλου 2008)

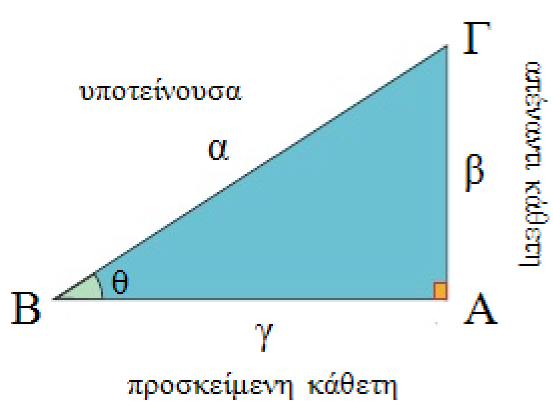
(Απ. Η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.)

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

1. Ορισμοί

Τριγωνομετρικός αριθμός		Στα αγγλικά		Ορισμός
ημίτονο	ημθ	sinus	sinθ	$\frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}}$
συνημίτονο	συνθ	cosines	cosθ	$\frac{\text{προσκείμενη κάθετος}}{\text{υποτείνουσα}}$
εφαπτομένη	εφθ	tangent	tanθ	$\frac{\text{απέναντι κάθετος}}{\text{προσκείμενη κάθετος}}$
συνεφαπτομένη	σφθ	cotangent	cotθ	$\frac{\text{προσκείμενη κάθετος}}{\text{απέναντι κάθετος}}$



$$\rightarrow \ \etaμθ = \frac{β}{α} \qquad \rightarrow \ συνθ = \frac{γ}{α} \qquad \rightarrow \ εφθ = \frac{β}{γ} \qquad \rightarrow \ σφθ = \frac{γ}{β}$$

2. Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

$\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$	$\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}$	$\sigma\varphi\theta = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$
$\varepsilon\varphi\theta\sigma\varphi\theta=1$	$\tau\varepsilon\mu\theta=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu\theta=\dfrac{1}{\eta\mu\theta}$

3. Τριγωνομετρικός Πίνακας

μοίρες	**0**	**30**	**45**	**60**	**90**	**180**	**270**	**360**
ακτίνια rad	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
συνθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
εφθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
σφθ	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Θεωρία Πιθανοτήτων Ι ………..……….. Σ. Κουνιάς & Χ. Μωυσιάδης

2. Άλγεβρα-Πιθανότητες ………..……….. Κ. Γκατζούλης

3. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ………..……….. Β. Παπαδάκης

4. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ………..……….. Ν. Σ. Μαυρογιάννης

5. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ………..……….. Α. Μπάρλας

6. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ………..……….. Χ. Στεργίου & Χ. Νάκης

7. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ………..……….. Α. Τραγανίτης

8. Ανάλυση-Συναρτήσεις ………..……….. Θ. Ξένος

9. Μαθήματα Θεωρίας Πιθανοτήτων ………..……….. Γ. Γκαρούτσος

10. Άλγεβρα Α΄ Λυκείου ………..……….. Γ. Βλάχος & Δ. Ιωάννου

ΣΕΛΙΔΕΣ INTERNET

1. Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία – http://www.cms.org.cy/

2. Διαγωνισμός Β. Ξανθόπουλου – http://users.sch.gr/mdogram/xantopoulos.htm

3. Τράπεζα Θεμάτων – http://exams-repo.cti.gr/

4. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία – http://www.hms.gr/

5. Ιστότοπος Μαθηματικών – http://parmenides51.blogspot.gr/p/eme.html

6. Μαθηματικές Παρουσιάσεις – http://perikentro.blogspot.gr/

7. Ιστότοπος Μαθηματικών – http://www.mathematica.gr/index.php

8. Υλικό Άλγεβρας & Γεωμετρίας – http://taexeiola.blogspot.gr/

9. Βάση Μαθηματικού Υλικού – http://www.askisiologio.gr/

10. Μαθηματικές Σημειώσεις – http://lisari.blogspot.gr/