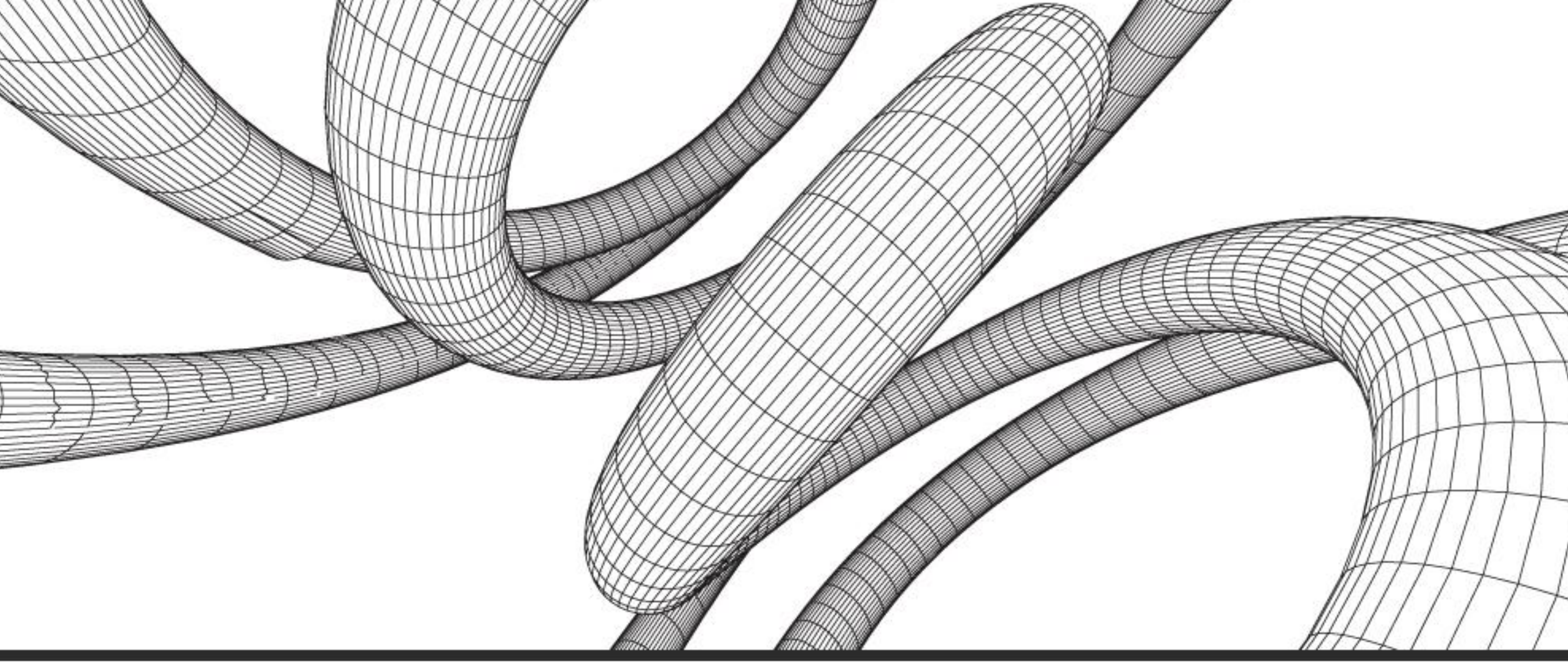

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων
&
Τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΙΔΡΥΜΑ ΠΕΙΡΑΙΑ

Λυμένα Θέματα Εξετάσεων

Επιμέλεια: ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι | **ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ**
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ (ΕΚΠΑ)
ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟ ΠΡΟΦΙΛ: http://teacherfinder.gr/idiaitera-mathimata/nikos-aleksandris
E-mail: ediaitero@gmail.com
Τηλ. 6944393147

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 1

Να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$$

ΛΥΣΗ

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}\right)^2-3^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+6-9}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x+6}+3}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{3+6}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστεί το παρακάτω αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)}dx$$

ΛΥΣΗ

Αναλύουμε το αρχικό κλάσμα $\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)}$ σε άθροισμα μερικών κλασμάτων.

Έχουμε ότι:

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)} = \frac{\alpha(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{\beta x(x+1)}{x^2(x+1)} + \frac{\gamma x^2}{x^2(x+1)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)}=\frac{\alpha(x+1)+\beta x(x+1)+\gamma x^2}{x^2(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$4x^2+3x+2=\alpha(x+1)+\beta x(x+1)+\gamma x^2\Leftrightarrow$$

$$4x^2+3x+2=\alpha x+\alpha+\beta x^2+\beta x+\gamma x^2\Leftrightarrow$$

$$4x^2+3x+2=(\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\Leftrightarrow$$

$\beta+\gamma=4$, $\alpha+\beta=3$, $\alpha=2\Leftrightarrow\alpha=2,\beta=1,\gamma=3$

Άρα τελικά είναι: $\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)}=\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{3}{x+1}$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\int\frac{4x^2+3x+2}{x^2(x+1)}dx=\int\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}+\frac{3}{x+1}dx=-\frac{2}{x}+\ln|x|+3\ln|x+1|+c$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 3

Να εξετάσετε αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση και αν έχει να λυθεί.

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=3\\ 4x-3y-4z&=0\\ 2x+6y-8z&=1 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4\\ 4 & -3 & -4\\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & -4\\ 6 & -8 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 4 & -4\\ 2 & -8 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 4 & -3\\ 2 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$2(24+24)-3(-32+8)+4(24+6)=2\cdot 48-3\cdot(-24)+4\cdot 30=$$

$$96+72+120=288$$

Επομένως είναι $D\neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x=\begin{vmatrix}3 & 3 & 4\\ 0 & -3 & -4\\ 1 & 6 & -8\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-3 & -4\\ 6 & -8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -8\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 6\end{vmatrix}=$$

$$3(24+24)-3(0+4)+4(0+3)=3\cdot 48-12+12=144$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 0 & -4\\ 2 & 1 & -8\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0 & -4\\ 1 & -8\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & -4\\ 2 & -8\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$$

$$2(0+4)-3(-32+8)+4(4-0)=2\cdot 4-3\cdot(-24)+16=8+72+16=96$$

$$D_z=\begin{vmatrix}2 & 3 & 3\\ 4 & -3 & 0\\ 2 & 6 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-3 & 0\\ 6 & 1\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}4 & -3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=$$

$$2(-3-0)-3(4-0)+3(24+6)=-6-12+3\cdot 30=-18+90=72$$

Επομένως έχουμε:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{144}{288}=\frac{1}{2},\quad y=\frac{D_y}{D}=\frac{96}{288}=\frac{1}{3},\quad z=\frac{D_z}{D}=\frac{72}{288}=\frac{1}{4}$$

Άρα είναι:

$$(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ 2001

23-01-2001

ΘΕΜΑ 4

Το κόστος παραγωγής ενός προϊόντος δίνεται από την σχέση:

$$C(x)=x^3-6x^2+520$$

σε χιλιάδες και x είναι ο αριθμός των προϊόντων.

Αν το κάθε προϊόν πωλείται προς 288 χιλιάδες δραχμές να βρεθούν:

α) Πότε η εταιρεία έχει μέγιστο κέρδος και ποιο είναι αυτό.

β) Η συνάρτηση του οριακού κόστους.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση κέρδους x μονάδων του προϊόντος είναι:

$P(x)=288x-C(x)$ ή $P(x)=288x-x^3+6x^2-520$

Έχουμε ότι:

$P'(x)=(288x-x^3+6x^2-520)'$ ή

$P'(x)=288-3x^2+12x$

Λύνουμε την εξίσωση $P'(x)=0$

Είναι:

$-3x^2+12x+288=0$ ή $-3(x^2-4x-96)=0$ ή

$x^2-4x-96=0$

Έχουμε ότι:

$$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4\cdot(-96)=16+384=400$$

Άρα είναι: $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{400}}{2\cdot 1}=\dfrac{4\pm 20}{2}$

x=12 ή x=-8 (απορρ.)

<u>Μονοτονία της συνάρτησης κέρδους P(x)</u>

x		12	
P΄(x)	+		-
P(x)	↗	T.M.	↘

Μέγιστο κέρδος έχουμε για x=12 και είναι:

$P(12)=288\cdot 12-12^3+6\cdot 12^2-520=$

$3456-1728+864-520=2072$ χιλιάδες δραχμές

β) Η συνάρτηση του οριακού κόστους (MC) είναι:

$$MC=\frac{dC(x)}{dx}=3x^2-12x$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$y=x^4-3x^{-2}+\sigma\upsilon\nu x+e^{-x}$$

Να υπολογιστεί η πρώτη παράγωγος y′.

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$y'=(x^4-3x^{-2}+\sigma\upsilon\nu x+e^{-x})'=4x^3-3\cdot(-2)x^{-3}-\eta\mu x+e^{-x}\cdot(-x)'=$

$4x^3+6x^{-3}-\eta\mu x-e^{-x}$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$I = \int (2x^3 - 3x^{-2} + 5e^{-x})dx$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$I = \int (2x^3 - 3x^{-2} + 5e^{-x})dx = 2\int x^3 dx - 3\int x^{-2}dx + 5\int e^{-x}dx =$$

$$2\cdot\frac{x^4}{4} + c_1 - 3\cdot\frac{x^{-1}}{-1} + c_2 + 5\cdot(-e^{-x}) + c_3 = \frac{x^4}{2} + 3\cdot x^{-1} - 5\cdot e^{-x} + c =$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{3}{x} - 5e^{-x} + c$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ˈΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ιˈ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 3

Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$A^2 - 5A + I$$

για τον παρακάτω πίνακα:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 2 - 3\cdot 4 & 2\cdot(-3) - 3\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 1\cdot 4 & 4\cdot(-3) + 1\cdot 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4-12 & -6-3 \\ 8+4 & -12+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix}$$

Επομένως είναι:

$$A^2 - 5A + I = \begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -8 & -9 \\ 12 & -11 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 & 15 \\ -20 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8-10+1 & -9+15+0 \\ 12-20+0 & -11-5+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -17 & 6 \\ -8 & -15 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Διοίκησης Επιχειρήσεων (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2001

ΘΕΜΑ 4

Να γίνει η διερεύνηση του παρακάτω συστήματος και να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις του.

$$\begin{aligned} x+2y-z&=0 \\ 4x+y+z&=-1 \\ -3x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$1\cdot(-1-2)-2\cdot(-4+3)-1\cdot(8+3)=-3-2\cdot(-1)-11=-3+2-11=-12$$

Επομένως είναι $D\neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2\cdot(1-2)-1\cdot(-2-2) = -2\cdot(-1)-1\cdot(-4) = 2+4 = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(1-2)-1\cdot(8-3) = 1\cdot(-1)-1\cdot 5 = -1-5 = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(2+2)-2\cdot(8-3) = 1\cdot 4 - 2\cdot 5 = 4-10 = -6$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

Άρα είναι:

$$(x,y,z) = (-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Αν $\varphi(x)=\alpha\eta\mu^2 x+\beta\eta\mu x-\gamma\sigma\upsilon\nu x$, να βρεθούν οι τιμές των πραγματικών αριθμών α,β,γ ώστε να είναι:

$$\varphi(\pi)=\varphi'(\pi)=\varphi''(\pi)=2$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε ότι:

$\varphi(x)=\alpha\eta\mu^2 x+\beta\eta\mu x-\gamma\sigma\upsilon\nu x$

<u>1$^{\eta}$ Παράγωγος</u>

$\varphi'(x)=(\alpha\eta\mu^2 x+\beta\eta\mu x-\gamma\sigma\upsilon\nu x)'=2\alpha\eta\mu x(\eta\mu x)'+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma\eta\mu x=$

$2\alpha\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma\eta\mu x=\alpha\eta\mu 2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma\eta\mu x$

<u>2$^{\eta}$ Παράγωγος</u>

$\varphi''(x)=(\alpha\eta\mu 2x+\beta\sigma\upsilon\nu x+\gamma\eta\mu x)'=\alpha\sigma\upsilon\nu 2x(2x)'-\beta\eta\mu x+\gamma\sigma\upsilon\nu x=$

$2\alpha\sigma\upsilon\nu 2x-\beta\eta\mu x+\gamma\sigma\upsilon\nu x$

Επομένως είναι:

$φ(π)=αημ^2π+βημπ-γσυνπ=γ$

$φ'(π)=αημ2π+βσυνπ+γημπ=-β$

$φ''(x)=2ασυν2π-βημπ+γσυνπ=2α-γ$

Άρα έχουμε ότι:

$γ=2$, $-β=2$, $2α-γ=2$,

$α=2$, $β=-2$, $γ=2$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 2

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

$$\mathrm{I}_1 = \int (\eta\mu 5x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x})dx \text{ , } \mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{5+x^2}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\mathrm{I}_1 = \int (\eta\mu 5x + \frac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 x})dx = \int \eta\mu 5x dx + 3\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx \quad (1)$$

Όμως είναι:

→ $\int \eta\mu 5x dx = -\frac{1}{5}\sigma\upsilon\nu 5x + c_1$

→ $3\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx = 3\varepsilon\varphi x + c_2$

Άρα είναι: $(1) \Rightarrow \mathrm{I}_1 = -\frac{1}{5}\sigma\upsilon\nu 5x + 3\varepsilon\varphi x + c$

Έχουμε ότι:

$$\mathrm{I}_2 = \int \frac{dx}{5+x^2} \quad (2)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Θέτουμε $x = \sqrt{5}\varepsilon\varphi t$ και έχουμε ότι $dx = \frac{\sqrt{5}}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt$.

Επιπλέον ισχύει η ταυτότητα: $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t} = 1 + \varepsilon\varphi^2 t$

Άρα είναι:

$$(2) \Rightarrow \mathrm{I}_2 = \int \frac{1}{5+5\varepsilon\varphi^2 t}\frac{\sqrt{5}}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt = \frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 t}dt =$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\int \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 t}(1+\varepsilon\varphi^2 t)dt = \frac{\sqrt{5}}{5}\int 1dt = \frac{\sqrt{5}}{5}t + c$$

Επομένως είναι:

$\mathrm{I}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right) + c$ ή αλλιώς $\mathrm{I}_2 = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}x\right) + c$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 4

Η ισότητα $\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx + \int \eta\mu^2 x dx = x$ είναι σωστή;

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

→ $\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\sigma\upsilon\nu 2x)dx = \frac{1}{2}\int (1+\sigma\upsilon\nu 2x)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c_1$

→ $\int \eta\mu^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1-\sigma\upsilon\nu 2x)dx = \frac{1}{2}\int (1-\sigma\upsilon\nu 2x)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c_2$

Επομένως έχουμε:

$$\int \sigma\upsilon\nu^2 x dx + \int \eta\mu^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c_1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\eta\mu 2x + c_2 = x + c$$

→ Άρα δεν ισχύει η παραπάνω ισότητα

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΘΕΜΑΤΑ Α΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 1996

ΘΕΜΑ 5

Ποιές τιμές πρέπει να έχουν οι $x, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας Α να είναι αντισυμμετρικός.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 3x+6 & -2x & 3x+1 \\ -\lambda & 0 & -4x \\ 5 & -8 & x+2 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται αντισυμμετρικός αν ισχύει:

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$

δηλαδή αν είναι αντίθετα τα στοιχεία που είναι ΄συμμετρικά΄ ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Επομένως έχουμε ότι:

$$\alpha_{12} = -\alpha_{21} \Leftrightarrow -2x = -(-\lambda) \Leftrightarrow \lambda = -2x \quad (1)$$

$$\alpha_{13} = -\alpha_{31} \Leftrightarrow 3x+1 = -5 \Leftrightarrow 3x = -6 \Leftrightarrow x = -2$$

Από την σχέση (1) έχουμε:

$\lambda = -2 \cdot (-2) = 4$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι:

$x = -2$ και $\lambda = 4$

Για αυτές τις τιμές ο ζητούμενος πίνακας Α είναι:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -5 \\ -4 & 0 & 8 \\ 5 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΠΙΝΑΚΕΣ (ΜΗΤΡΕΣ) – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθούν οι τιμές του x ώστε ο πίνακας A να είναι συμμετρικός.

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 \\ 2-x & 2 & 1 \\ 0 & x^2 & 3 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται συμμετρικός αν ισχύει:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

δηλαδή αν είναι ίσα τα στοιχεία που είναι ΄συμμετρικά΄ ως προς την κύρια διαγώνιο του πίνακα.

Επομένως έχουμε ότι:

$\alpha_{12} = \alpha_{21} \Leftrightarrow x = 2 - x \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

$\alpha_{32} = \alpha_{23} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$ Άρα τελικά είναι: $x = 1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΠΙΝΑΚΕΣ (ΜΗΤΡΕΣ) – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να εξεταστεί αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$\begin{bmatrix} x^2-5x & x+1 \\ x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

ΛΥΣΗ

Προκειμένου να είναι ίσοι οι παραπάνω πίνακες πρέπει:

$\rightarrow$ $x^2-5x=-6 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

$\rightarrow$ $x+1=4 \Leftrightarrow x=3$

$\rightarrow$ $x=3$

Επομένως υπάρχει κοινή λύση ($x=3$) για την οποία οι πίνακες είναι ίσοι.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΠΙΝΑΚΕΣ (ΜΗΤΡΕΣ) – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

αυτοδύναμος;.

ΛΥΣΗ

Για να είναι αυτοδύναμος ο πίνακας Α θα πρέπει να ισχύει ότι:

$$A^2 = A$$

Έχουμε ότι:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4+2-4 & -4-6+8 & -8-8+12 \\ -2-3+4 & 2+9-8 & 4+12-12 \\ 2+2-3 & -2-6+6 & -4-8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Τελικά ισχύει ότι: $A^2 = A$

Επομένως ο πίνακας Α είναι αυτοδύναμος.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται ότι: $y=xe^{-x}$.

Να δειχθεί ότι: $xy'-(1-x)y=0$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$y'=(xe^{-x})'=(x)'e^{-x}+x(e^{-x})'=e^{-x}+xe^{-x}(-x)'=e^{-x}-xe^{-x}$

Επομένως είναι:

$xy'-(1-x)y=x(e^{-x}-xe^{-x})-(1-x)xe^{-x}=xe^{-x}-x^2e^{-x}-xe^{-x}+x^2e^{-x}=0$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u> (ΘΕΜΑ ΠΡΟΟΔΟΥ)

Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ στη θέση x=0 ($f'(0)$) αν:

$$f(x)=e^{-x^2}\eta\mu x-\varepsilon\varphi 5x^2+\sigma\upsilon\nu^2 3x^4$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έχουμε ότι:

$$f'(x)=\left(e^{-x^2}\eta\mu x-\varepsilon\varphi 5x^2+\sigma\upsilon\nu^2 3x^4\right)'=$$

$$\left(e^{-x^2}\right)'\eta\mu x+e^{-x^2}\left(\eta\mu x\right)'-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 5x^2}\left(5x^2\right)'+2\sigma\upsilon\nu 3x^4\left(\sigma\upsilon\nu 3x^4\right)'=$$

$$e^{-x^2}\left(-x^2\right)'\eta\mu x+e^{-x^2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{10x}{\sigma\upsilon\nu^2 5x^2}+2\sigma\upsilon\nu 3x^4\left(-\eta\mu 3x^4\right)\left(3x^4\right)'=$$

$$-2xe^{-x^2}\eta\mu x+e^{-x^2}\sigma\upsilon\nu x-\frac{10x}{\sigma\upsilon\nu^2 5x^2}-24x^3\sigma\upsilon\nu 3x^4\eta\mu 3x^4$$

Επομένως είναι: $f'(0)=e^0\sigma\upsilon\nu 0=1$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 6

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln(1+\eta\mu x)$$

Να δείξετε ότι ισχύει:

$$f''(x) + e^{-f(x)} = 0$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

1η Παράγωγος

→ $f'(x) = \left(\ln(1+\eta\mu x)\right)' = \dfrac{1}{1+\eta\mu x}\left(1+\eta\mu x\right)' = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$

2η Παράγωγος

→ $f''(x) = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}\right)' = \dfrac{\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'\left(1+\eta\mu x\right) - \sigma\upsilon\nu x\left(1+\eta\mu x\right)'}{\left(1+\eta\mu x\right)^2} =$

$$\frac{-\eta\mu x-\eta\mu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\left(1+\eta\mu x\right)^2}=\frac{-\eta\mu x-1}{\left(1+\eta\mu x\right)^2}=-\frac{1+\eta\mu x}{\left(1+\eta\mu x\right)^2}=-\frac{1}{1+\eta\mu x}$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$f''(x)+e^{-f(x)}=-\frac{1}{1+\eta\mu x}+e^{-\ln(1+\eta\mu x)}=-\frac{1}{1+\eta\mu x}+e^{\ln(1+\eta\mu x)^{-1}}=$$

$$-\frac{1}{1+\eta\mu x}+\left(1+\eta\mu x\right)^{-1}=-\frac{1}{1+\eta\mu x}+\frac{1}{1+\eta\mu x}=0$$

<u>Σημείωση</u>: Χρησιμοποιήσαμε τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$
- $e^{\ln g(x)}=g(x)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι**

Τμήμα Λογιστικής (Τ.Ε.Ι. ΠΕΙΡΑΙΑ)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 7

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x dx$$

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $u = \eta\mu x \to du = \sigma\upsilon\nu x dx$

→ Για $x = 0$ είναι $u = 0$

→ Για $x = \frac{\pi}{2}$ είναι $u = 1$

Επομένως είναι:

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^3 x \sigma\upsilon\nu x dx = \int_0^1 u^3 du = \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (2x+3)e^{-2x}dx$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\mathrm{I} = \int_0^1 (2x+3)e^{-2x}dx = \int_0^1 (2x+3)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)' dx =$$

$$\left[(2x+3)\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 + \int_0^1 (2x+3)' \frac{e^{-2x}}{2} dx =$$

$$-\frac{5}{2e^2} + \frac{3}{2} + \int_0^1 e^{-2x}dx = -\frac{5}{2e^2} + \frac{3}{2} + \left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^1 =$$

$$-\frac{5}{2e^2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2e^2} + \frac{4}{2} = \frac{4e^2-6}{2e^2} = \frac{2e^2-3}{e^2}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 9

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$\mathrm{I} = \int \frac{dx}{x^2 - 9} dx$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε ότι:

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{\alpha}{x-3} + \frac{\beta}{x+3}$$

Οπότε είναι:

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{\alpha(x+3)}{x^2-9} + \frac{\beta(x-3)}{x^2-9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{\alpha x + 3\alpha + \beta x - 3\beta}{x^2-9} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{(\alpha+\beta)x + 3(\alpha-\beta)}{x^2-9}$$

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι:

$\alpha+\beta=0$ και $3(\alpha-\beta)=1$

Μετά από πράξεις βρίσκουμε ότι:

$\alpha=\frac{1}{6}$ και $\beta=-\frac{1}{6}$

Το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\mathrm{I}=\int\frac{1}{6(x-3)}dx-\int\frac{1}{6(x+3)}dx=\frac{1}{6}\ln|x-3|-\frac{1}{6}\ln|x+3|+c$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΄ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι΄

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ – ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να υπολογίσετε το παρακάτω ολοκλήρωμα.

$$\mathrm{I} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sigma\upsilon\nu x}$$

ΛΥΣΗ

Το παραπάνω ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

Θέτουμε:

$$t = \varepsilon\varphi\frac{x}{2} \to \ldots \to dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Επιπλέον αποδεικνύεται ότι:

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

→ Για $x=-\frac{\pi}{2}$ είναι $t=\varepsilon\varphi(-\frac{\pi}{4})=-1$

→ Για $x=\frac{\pi}{2}$ είναι $t=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=1$

Το αρχικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\mathrm{I}=\int_{-1}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}=\int_{-1}^{1}\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2}{1+t^2}}=$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{2dt}{2}=\int_{-1}^{1}dt=\left[t\right]_{-1}^{1}=1-(-1)=2$$