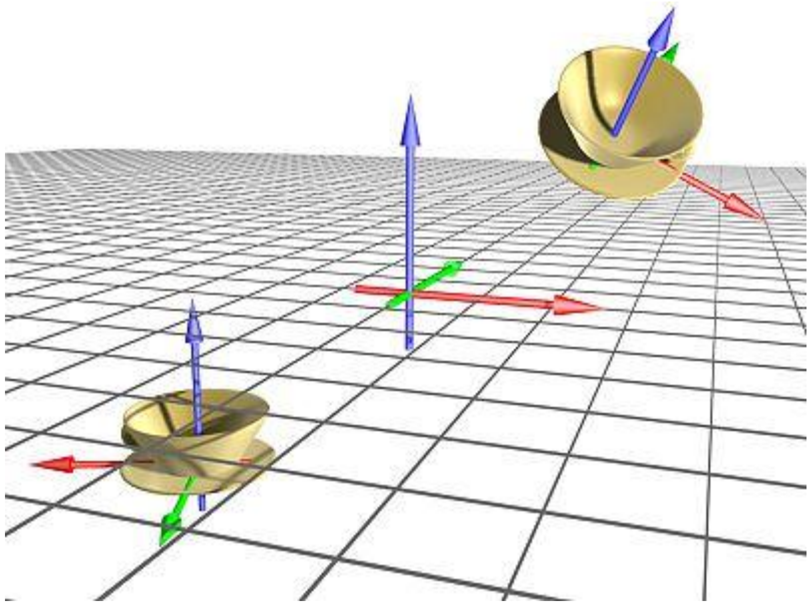
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



Τμήμα Φαρμακευτικής

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

Λυμένες Ασκήσεις & Λυμένα Θέματα Εξετάσεων

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΠΕΡΙΟΔΟΣ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ & ΘΕΜΑΤΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ | **ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ**
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ (ΕΚΠΑ)
ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟ ΠΡΟΦΙΛ: http://teacherfinder.gr/idiaitera-mathimata/nikos-aleksandris
E-mail: ediaitero@gmail.com
Τηλ. 6944393147

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

<u>ΘΕΜΑ 1</u>

Δίνεται ο πίνακας:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Να υπολογίσετε τον πίνακα $A x A^T$.

2) Από το αποτέλεσμα του ερωτήματος (1) τί συμπεράσματα βγάζετε για την αντιστρεψιμότητα του πίνακα Α; Από τα συμπεράσματα αυτά μπορείτε να συνάγετε τον πίνακα A^{-1}.

<u>ΛΥΣΗ:</u>

1) Ο **ανάστροφος (A^T)** ενός πίνακα Α προκύπτει εάν διατάξουμε τις γραμμές του Α ως στήλες με την ίδια σειρά (οπότε αυτόματα οι στήλες γίνονται γραμμές).

Επομένως έχουμε ότι:

$$A^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα είναι:

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{4}+\frac{2}{4} & \frac{2}{4}-\frac{2}{4} & 0 \\ \frac{2}{4}-\frac{2}{4} & \frac{2}{4}+\frac{2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2) Επομένως έχουμε ότι:

$$A \cdot A^T = I \Leftrightarrow A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (Γενικά ισχύει ότι: $A \cdot A^{-1} = I$)

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα Σ:

$$\Sigma:\begin{cases}\alpha x+y+(\alpha-1)z=\alpha+1\\ x+\alpha y+z=2\\ x+y+z=\alpha\end{cases}\quad,\alpha\in\mathbb{R}$$

1) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου α το Σ είναι σύστημα Cramer. Στην περίπτωση αυτή να βρείτε πόσες και ποιες είναι οι λύσεις του συστήματος.

2) Για τις υπόλοιπες τιμές του α το Σ έχει λύσεις; Αν ναι, να τις βρείτε.

ΛΥΣΗ:

1) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών:

$$D=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & \alpha-1\\ 1 & \alpha & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+(\alpha-1)\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$\alpha(\alpha-1)-(1-1)+(\alpha-1)(1-\alpha)=\alpha^2-\alpha+\alpha-\alpha^2-1+\alpha=\alpha-1$$

Επομένως για: $D\neq 0\Leftrightarrow \alpha-1\neq 0\Leftrightarrow \alpha\neq 1$, το Σ έχει μοναδική λύση:

$$x=\frac{D_x}{D},\ y=\frac{D_y}{D},\ z=\frac{D_z}{D}$$

Έχουμε ότι:

$$\to D_x=\begin{vmatrix}\alpha+1 & 1 & \alpha-1\\ 2 & \alpha & 1\\ \alpha & 1 & 1\end{vmatrix}=(\alpha+1)\begin{vmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ \alpha & 1\end{vmatrix}+(\alpha-1)\begin{vmatrix}2 & \alpha\\ \alpha & 1\end{vmatrix}=$$

$$(\alpha+1)(\alpha-1)-(2-\alpha)+(\alpha-1)(2-\alpha^2)=\alpha^2-1-2+\alpha+2\alpha-\alpha^3-2+\alpha^2=$$

$$-\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha-5$$

$$\to D_y=\begin{vmatrix}\alpha & \alpha+1 & \alpha-1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & \alpha & 1\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}2 & 1\\ \alpha & 1\end{vmatrix}-(\alpha+1)\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+(\alpha-1)\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}=$$

$$\alpha(2-\alpha)-(\alpha+1)(1-1)+(\alpha-1)(\alpha-2)=2\alpha-\alpha^2+\alpha^2-2\alpha-\alpha+2=$$

$$2-\alpha$$

$$\to D_z=\begin{vmatrix}\alpha & 1 & \alpha+1\\ 1 & \alpha & 2\\ 1 & 1 & \alpha\end{vmatrix}=\alpha\begin{vmatrix}\alpha & 2\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & \alpha\end{vmatrix}+(\alpha+1)\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ 1 & 1\end{vmatrix}=$$

$$\alpha(\alpha^2-2)-(\alpha-2)+(\alpha+1)(1-\alpha)=\alpha^3-2\alpha-\alpha+2+1-\alpha^2=$$

$$\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+3=\alpha^2(\alpha-1)-3(\alpha-1)=(\alpha-1)(\alpha^2-3)$$

Άρα είναι:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha-5}{\alpha-1},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{2-\alpha}{\alpha-1},\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{(\alpha-1)(\alpha^2-3)}{\alpha-1}=\alpha^2-3$$

2) Στην περίπτωση που είναι:

$$\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

τότε το σύστημα Σ γίνεται:

$$\Sigma : \begin{cases} x + y = 2 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι αδύνατο γιατί όπως εύκολα φαίνεται από τις δύο τελευταίες εξισώσεις προκύπτει ότι: 1=2, που είναι άτοπο.

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x\ln\frac{1}{x},\ D \to \mathbb{R}$$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f. Διατυπώστε το κριτήριο της $2^{ης}$ παραγώγου. Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της f (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο).

3) Να βρείτε ένα πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμού από το οποίο προσεγγίζεται η συνάρτηση f στα κρίσιμα σημεία της.

ΛΥΣΗ:

1) Πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Επομένως υπό τη μορφή διαστήματος είναι:

$$x \in (0, +\infty)$$

2) Αρχικά υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f^{'}(x)=\left(x\ln\frac{1}{x}\right)^{'}=(x)^{'}\ln\frac{1}{x}+x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{'}=\ln\frac{1}{x}+x\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)^{'}=$$

$$\ln\frac{1}{x}-x^{2}\frac{1}{x^{2}}=\ln\frac{1}{x}-1$$

Κατόπιν βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f^{'}(x)=0\Leftrightarrow\ln\frac{1}{x}-1=0\Leftrightarrow\ln\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow\frac{1}{x}=e\Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$$

→ <u>Κριτήριο 2ης Παραγώγου (για τοπικά ακρότατα)</u>

Ας είναι y=f(x) μία συνάρτηση ορισμένη στο [a, b], παραγωγίσιμη στο (a, b) και x_o ένα κρίσιμο σημείο της f, στο οποίο υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και είναι διάφορη του μηδενός. Τότε :

- ✓ αν $f^{''}(x_o)>0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_o.
- ✓ αν $f^{''}(x_o)<0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_o.

Επομένως έχουμε:

$$f^{''}(x)=\left(\ln\frac{1}{x}-1\right)^{'}=\frac{1}{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)^{'}=x\left(-\frac{1}{x^{2}}\right)=-\frac{1}{x}$$

$$f^{''}\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{\frac{1}{e}}=-e<0$$

<u>Συμπέρασμα:</u>

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_o=\frac{1}{e}$ το $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}$

3) <u>Προσέγγιση συναρτήσεων με πολυώνυμα Taylor</u>

<u>Γενικά:</u>

Προσέγγιση με πολυώνυμο Taylor βαθμού n γύρω από το σημείο $x_o=\alpha$:

$$f(\alpha)+f^{'}(\alpha)(\mathrm{x}-\alpha)+\frac{f^{''}(\alpha)}{2}(\mathrm{x}-\alpha)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(\mathrm{x}-\alpha)^n$$

Υπολογίζουμε το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 γύρω από το $x_o=\frac{1}{e}$ για την $f(x)=x\ln\frac{1}{x}$:

$$f(x)\approx f(\frac{1}{e})+f^{'}(\frac{1}{e})(\mathrm{x}-\frac{1}{e})+\frac{f^{''}(\frac{1}{e})}{2}(\mathrm{x}-\frac{1}{e})^2 \quad (1)$$

$\rightarrow\ f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{\frac{1}{e}}=\frac{1}{e}\ln e=\frac{1}{e}$

$\rightarrow\ f^{'}(\frac{1}{e})=0$

$\rightarrow\ f^{''}(\frac{1}{e})=-\frac{1}{\frac{1}{e}}=-e$

Επομένως έχουμε:

(1) $\Rightarrow f(x)\approx\frac{1}{e}-\frac{e}{2}(x-\frac{1}{e})^2=\frac{1}{e}-\frac{e}{2}(x^2-\frac{2}{e}x+\frac{1}{e^2})=$

$-\frac{e}{2}x^2+x-\frac{1}{2e}+\frac{1}{e}=-\frac{e}{2}x^2+x-\frac{1}{2e}+\frac{2}{2e}=-\frac{e}{2}x^2+x+\frac{1}{2e}$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε την διαφορική εξίσωση:

$$xy' + (x-1)y = x^2 \cos x$$

ΛΥΣΗ:

1) Αρχικά θα βρούμε τη λύση της ομογενούς διαφορικής: $xy' + (x-1)y = 0$

Έχουμε ότι:

$$xy' + (x-1)y = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} + (x-1)y = 0 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = -(x-1)y \Leftrightarrow$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-(x-1)}{x}dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-x+1}{x}dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = (-1+\frac{1}{x})dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-1+\frac{1}{x})dx \Leftrightarrow \ln|y| = -x + \ln|x| + c \Leftrightarrow \ln|y| - \ln|x| = -x + c \Leftrightarrow$$

$$\ln\left|\frac{y}{x}\right| = -x + c \Leftrightarrow e^{\ln\left|\frac{y}{x}\right|} = e^{-x+c} \Leftrightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = e^{-x}\cdot e^{-c} \Leftrightarrow \left|\frac{y}{x}\right| = c_1 e^{-x} \overset{c_1>0}{\Leftrightarrow} y = c_1 x e^{-x} \quad (c_1 = e^{-c} > 0)$$

Επομένως η λύση της ομογενούς είναι: $y_o = c_1 x e^{-x}$

Παρατηρώντας προσεκτικά την εξίσωση της δοθείσας διαφορικής θεωρούμε κατάλληλη μερική λύση:

$$y_\mu = x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)$$

Η μερική λύση πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση της διαφορικής, δηλαδή:

$$xy_\mu' + (x-1)y_\mu = x^2\cos x \quad (1)$$

Έχουμε ότι:

$\rightarrow\ y_\mu' = \left(x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)\right)' = (x)'(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x) + x\left(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x\right)' =$

$\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x + x(-\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x - \mathrm{A}x\sin x + \mathrm{B}x\cos x$

Άρα με αντικατάσταση έχουμε: (1) $\Rightarrow$

$x(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x - \mathrm{A}x\sin x + \mathrm{B}x\cos x) + (x-1)(\mathrm{A}x\cos x + \mathrm{B}x\sin x) = x^2\cos x \Leftrightarrow$

$\mathrm{A}x\cos x + \mathrm{B}x\sin x - \mathrm{A}x^2\sin x + \mathrm{B}x^2\cos x + \mathrm{A}x^2\cos x + \mathrm{B}x^2\sin x - \mathrm{A}x\cos x - \mathrm{B}x\sin x = x^2\,\mathrm{cosx} \Leftrightarrow$

$-\mathrm{A}x^2\sin x + \mathrm{B}x^2\cos x + \mathrm{A}x^2\cos x + \mathrm{B}x^2\sin x = x^2\,\mathrm{cosx} \Leftrightarrow$

$(\mathrm{A}+\mathrm{B})x^2\cos x + (\mathrm{B}-\mathrm{A})x^2\sin x = x^2\,\mathrm{cosx}$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι: $\mathrm{A}+\mathrm{B}=1$ και $\mathrm{B}-\mathrm{A}=0$

Επομένως είναι: $\mathrm{A}=\mathrm{B}=\dfrac{1}{2}$, που σημαίνει ότι $y_\mu = \dfrac{1}{2}\mathrm{x}\cos x + \dfrac{1}{2}\mathrm{x}\sin x$

Η λύση της δοθείσας διαφορικής εξίσωσης είναι:

$$y = y_o + y_\mu = c_1 x e^{-x} + \frac{1}{2}\mathrm{x}\cos x + \frac{1}{2}\mathrm{x}\sin x$$

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2014

ΘΕΜΑ 6

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x,y)=x^2y+\ln(xy)$$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

2) Να βρείτε τις μερικές παραγώγους $1^{ης}$ τάξης της παραπάνω συνάρτησης.

ΛΥΣΗ:

1) Πρέπει να ισχύει ότι:

$xy>0$

Επομένως είναι:

$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : xy>0\right\}$

2) Οι μερικές παραγώγοι $1^{ης}$ τάξης της συνάρτησης είναι:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+\ln(xy)\right)=2yx+\frac{1}{xy}y=2yx+\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+\ln(xy)\right)=x^2+\frac{1}{xy}x=x^2+\frac{1}{y}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Έστω ο πίνακας:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},\ \theta\in\mathbb{R}$$

1) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AA^T}=\mathrm{A^TA}=\mathrm{I}$.

2) Να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$\mathrm{A}+\mathrm{A^T}=\mathrm{I}$$

ΛΥΣΗ:

1) Ο **ανάστροφος (A^T)** ενός πίνακα Α προκύπτει εάν διατάξουμε τις γραμμές του Α ως στήλες με την ίδια σειρά (οπότε αυτόματα οι στήλες γίνονται γραμμές).

Επομένως είναι:

$$\mathrm{A^T}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

Έχουμε ότι:

$$AA^{T} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

2) Έχουμε ότι:

$$A + A^{T} = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta + \cos\theta & \sin\theta - \sin\theta \\ \sin\theta - \sin\theta & \cos\theta + \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 2\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$2\cos\theta = 1 \Leftrightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow$$

$$\theta = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{3} \text{ με } \kappa \in \mathbb{Z}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΙΝΑΚΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι πίνακες:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha & 0\\ 0 & 1 & -\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}$$

1) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB}=\mathrm{I}$.

2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}^2-\mathrm{A}^{-1}=3(\mathrm{A}-\mathrm{I})$

ΛΥΣΗ:

1) Έχουμε ότι:

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}1 & -\alpha & 0\\ 0 & 1 & -\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \alpha & \alpha^2\\ 0 & 1 & \alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \alpha-\alpha & \alpha^2-\alpha^2\\ 0 & 1 & \alpha-\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\mathrm{I}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Έχουμε ότι:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha-\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -\alpha-\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως είναι:

$$\rightarrow A^2 - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2\alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -2\alpha-\alpha & \alpha^2-\alpha^2 \\ 0 & 1-1 & -2\alpha-\alpha \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα έχουμε:

$$\rightarrow 3(A-I) = 3A - 3I = 3\begin{pmatrix} 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 3 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-3 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 3-3 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι ισχύει η δοθείσα ισότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να γίνει η διερεύνηση του παρακάτω συστήματος και να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις του.

$$\begin{aligned} x+2y-z&=0 \\ 4x+y+z&=-1 \\ -3x+2y-z&=2 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ:

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$1\cdot(-1-2)-2\cdot(-4+3)-1\cdot(8+3)=-3-2\cdot(-1)-11=-3+2-11=-12$$

Επομένως είναι $D\neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2\cdot(1-2)-1\cdot(-2-2) = -2\cdot(-1)-1\cdot(-4) = 2+4 = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(1-2)-1\cdot(8-3) = 1\cdot(-1)-1\cdot 5 = -1-5 = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(2+2)-2\cdot(8-3) = 1\cdot 4-2\cdot 5 = 4-10 = -6$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2},\ y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2},\ z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

ΑΣΚΗΣΗ 4

Να εξετάσετε αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση και αν έχει να λυθεί.

$$\begin{aligned} 2x+3y+4z&=3\\ 4x-3y-4z&=0\\ 2x+6y-8z&=1 \end{aligned}$$

ΛΥΣΗ:

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4\\ 4 & -3 & -4\\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} -3 & -4\\ 6 & -8 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 4 & -4\\ 2 & -8 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 4 & -3\\ 2 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$2(24+24)-3(-32+8)+4(24+6)=2\cdot 48-3\cdot(-24)+4\cdot 30=$$

$$96+72+120=288$$

Επομένως είναι $D\neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$3(24+24)-3(0+4)+4(0+3)=3\cdot 48-12+12=144$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(0+4)-3(-32+8)+4(4-0)=2\cdot 4-3\cdot(-24)+16=8+72+16=96$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(-3-0)-3(4-0)+3(24+6)=-6-12+3\cdot 30=-18+90=72$$

Επομένως έχουμε:

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{144}{288}=\frac{1}{2},\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{96}{288}=\frac{1}{3},\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{72}{288}=\frac{1}{4}$$

Άρα είναι:

$$(x,y,z)=(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4})$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης:

$$y' = -y^2$$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε ότι:

$$y' = -y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -y^2 \Leftrightarrow \frac{dy}{-y^2} = dx \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{-y^2} = \int dx \Leftrightarrow -\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \Leftrightarrow \frac{1}{y} = x + c \Leftrightarrow y = \frac{1}{x+c}$$

→ Παρατήρηση: Είναι εμφανές ότι και η συνάρτηση y=0 ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση χωρίς να προέρχεται από την γενική λύση $y = \frac{1}{x+c}$ για κάποια πεπερασμένη τιμή της c. Η λύση y=0 αποτελεί την περιβάλλουσα των λύσεων $y = \frac{1}{x+c}$ της διαφορικής εξίσωσης. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να λύσετε το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y' \sin x = y(y-1),\ y(\frac{\pi}{2}) = 2$$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε ότι:

$$y' \sin x = y(y-1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}\sin x = y(y-1) \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)} = \int \frac{dx}{\sin x} \Leftrightarrow \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) dy = \int \frac{dx}{\sin x} \quad (1) \quad (\text{Ισχύει ότι: } \frac{1}{y(y-1)} = \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})$$

Το δεξί μέλος της (1) υπολογίζεται ως εξής:

$$\rightarrow \mathrm{I} = \int \frac{dx}{\sin x}$$

Θέτουμε $t = \tan\frac{x}{2}$

Επιπλέον ισχύουν: $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ και $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$

Επομένως έχουμε ότι:

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c$$

Άρα τελικά έχουμε: (1) $\Rightarrow$

$$\ln|y-1|-\ln|y|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c\Leftrightarrow\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+c\Leftrightarrow\ (\,y\in(1,+\infty)\,,\,x\in(0,\pi)\,)$$

$$\ln\frac{y-1}{y}=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+c\Leftrightarrow\ln\frac{y-1}{y}=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)+\ln C,\ C>0$$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι: $\dfrac{y-1}{y}=C\tan\dfrac{x}{2},\ C>0$

Κατόπιν προσδιορίζουμε το C από την δοθείσα αρχική συνθήκη:

$$y(\frac{\pi}{2})=2\Leftrightarrow\frac{2-1}{2}=C\tan\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow C\tan\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C\cdot1=\frac{1}{2}\Leftrightarrow C=\frac{1}{2}$$

Επομένως η ζητούμενη λύση είναι:

$$\frac{y-1}{y}=\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow y(x)=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}-2}$$

→ <u>Παρατήρηση:</u> Οι συναρτήσεις $y=1$ και $y=0$ είναι ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, αφού $y(y-1)=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 7

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

2) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f. Διατυπώστε το κριτήριο της 2ης παραγώγου. Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της f (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο).

ΛΥΣΗ:

1) Πρέπει να ισχύει ότι: $x>0$

Επομένως υπό τη μορφή διαστήματος είναι: $x\in(0,+\infty)$

2) Αρχικά υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)'=\frac{(\ln x)'\,x^2-\ln x\left(x^2\right)'}{x^4}=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

Κατόπιν βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3}=0 \Leftrightarrow 1-2\ln x=0 \Leftrightarrow$$

$$2\ln x=1 \Leftrightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x}=e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x=\sqrt{e}$$

→ <u>Κριτήριο 2ης Παραγώγου (για τοπικά ακρότατα)</u>

Ας είναι y=f(x) μία συνάρτηση ορισμένη στο [a, b], παραγωγίσιμη στο (a, b) και x_o ένα κρίσιμο σημείο της f, στο οποίο υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και είναι διάφορη του μηδενός. Τότε :

- ✓ αν $f^{''}(x_o)>0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_o.
- ✓ αν $f^{''}(x_o)<0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_o.

Επομένως έχουμε:

$$f^{''}(x)=\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)^{'}=\frac{\left(1-2\ln x\right)^{'}x^3-\left(1-2\ln x\right)\left(x^3\right)^{'}}{x^6}=$$

$$\frac{-\frac{2}{x}x^3-3x^2\left(1-2\ln x\right)}{x^6}=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{-5x^2+6x^2\ln x}{x^6}=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

$$f^{''}(\sqrt{e})=\frac{-5+6\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^4}=\frac{-5+6\ln e^{\frac{1}{2}}}{e^2}=\frac{-5+3}{e^2}=-\frac{2}{e^2}<0$$

<u>Συμπέρασμα:</u>

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_o=\sqrt{e}$ το $f(\sqrt{e})=\frac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2}=\frac{1}{2e}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΝΑΛΥΣΗ

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να βρεθούν οι α, β $\in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$, να δέχεται τοπικό ακρότατο στα σημεία x_o=1 και x_o=-2. Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

ΛΥΣΗ:

Αρχικά υπολογίζουμε την 1η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \left(\alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1\right)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 6$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta - 6 = 0 \\ 12\alpha - 4\beta - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την 2η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f''(x) = \left(3\alpha x^2 + 2\beta x - 6\right)' = 6\alpha x + 2\beta$$

$f''(1) = 9 > 0$ (Τ.Ε. στο x_o=1) και $f''(-2) = -9 < 0$ (Τ.Μ. στο x_o=-2)

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 9

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x,y) = e^x \sin(xy)$$

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους 1^{ης} τάξης της παραπάνω συνάρτησης.

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι 1^{ης} τάξης της συνάρτησης είναι:

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \sin(xy)\right) = e^x \sin(xy) + e^x \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(xy)\right) = e^x \sin(xy) + ye^x \cos(xy)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \sin(xy)\right) = e^x \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(xy)\right) = xe^x \cos(xy)$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 10

Δίνονται οι συναρτήσεις:

Α. $f(x,y)=x^2e^{y+x^3}$, Β. $g(x,y)=\dfrac{1}{y+x^3}$

Να βρείτε τις μερικές παραγώγους 1ης τάξης των παραπάνω συναρτήσεων.

ΛΥΣΗ:

Οι μερικές παράγωγοι 1ης τάξης των συναρτήσεων είναι:

Α. $\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2e^{y+x^3}\right)=2xe^{y+x^3}+x^2e^{y+x^3}(x^3)'=2xe^{y+x^3}+3x^4e^{y+x^3}$

$\rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2e^{y+x^3}\right)=x^2e^{y+x^3}\left(y\right)'=x^2e^{y+x^3}$

Β. $\rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y+x^3}\right)=-\dfrac{1}{(y+x^3)^2}\left(x^3\right)'=-\dfrac{3x^2}{(y+x^3)^2}$

$\rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y+x^3}\right)=-\dfrac{1}{(y+x^3)^2}\left(y\right)'=-\dfrac{1}{(y+x^3)^2}$

ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ TAYLOR

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να δώσετε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης:

$$f(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ:

Έχουμε ότι:

$$f(x)=e^x \Rightarrow f(0)=e^0=1$$

$$f'(x)=\left(e^x\right)' \Rightarrow f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=e^0=1$$

$$f''(x)=\left(e^x\right)' \Rightarrow f''(x)=e^x \Rightarrow f''(0)=e^0=1$$

$$\dots$$

$$f^{(n)}(x)=e^x \Rightarrow f^{(n)}(0)=e^0=1$$

Άρα το ανάπτυγμα της εκθετικής συνάρτησης είναι:

$$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot(x-0)^n \Rightarrow e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\dots$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τμήμα Φαρμακευτικής (Α.Π.Θ.)

ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΑΠΤΥΓΜΑΤΑ TAYLOR

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να δώσετε το ανάπτυγμα σε σειρά Taylor της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln x,\ x \in (0, +\infty)$$

ΛΥΣΗ:

Για τη συνάρτηση $f(x) = \ln x$ η οποία είναι παραγωγίσιμη απεριόριστες φορές στο πεδίο ορισμού της, επιλέγουμε ως κέντρο το $\alpha = 1$.

Έχουμε ότι:

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1$$

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' \Rightarrow f''(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' \Rightarrow f'''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' \Rightarrow f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6$$

...

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n} \Rightarrow f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

<u>Προσοχή:</u> Η τελευταία σχέση αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγικό τρόπο.

Άρα το ανάπτυγμα της λογαριθμικής συνάρτησης είναι:

$$\ln x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}(x-1)^n =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n,\ |x-1|<1$$