

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΛΥΣΕΩΝ: ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ

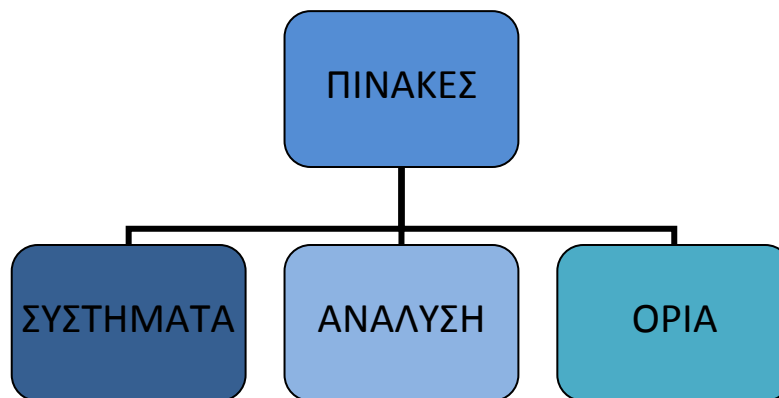
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΕΚΠΑ

ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΕΣ ΠΕΡΙΟΔΟΙ: ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009 & ΙΟΥΛΙΟΣ 2013



ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ | **ΝΙΚΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΗΣ**
ΠΤΥΧΙΟΥΧΟΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ (ΕΚΠΑ)

ΔΙΑΔΙΚΤΥΑΚΟ ΠΡΟΦΙΛ: <http://teacherfinder.gr/idiaitera-mathimata/nikos-aleksandris>

E-mail: ediaitero@gmail.com

Τηλ. 6944393147

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 1^ο

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Να εκτελεστούν, όπου είναι δυνατόν οι παρακάτω πράξεις. Στις περιπτώσεις που οι πράξεις δεν ορίζονται να αιτιολογηθεί.

$$A+B, A+D, B-C, AB, C^2, AC, A^2$$

(ii) Να δοθεί ο ανάστροφος του πίνακα E (E^T) και να γίνει έλεγχος για την ύπαρξη του αντιστρόφου του. Αν υπάρχει να υπολογιστεί.

(iii) Να γίνει έλεγχος για την ύπαρξη του αντιστρόφου του C (C^{-1}). Αν υπάρχει να υπολογιστεί.

Λύση:

(i) Παρακάτω δίνονται μόνο οι επιτρεπτές πράξεις:

$$\rightarrow A+D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+3 & 2+0 \\ -2-5 & 2+1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+0+2 & -1+0+8 \\ -6+0-1 & 2+2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow C^2 = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+7 & 21-14 \\ 3-2 & 7+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 7 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$$

(ii) Ο ανάστροφος ενός $n \times m$ πίνακα $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$ είναι ο $m \times n$ πίνακας που προκύπτει με την μετατροπή των γραμμών σε στήλες, $\mathbf{A}^T = (\alpha_{ji})$.

$$\rightarrow E^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του E.

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Επομένως ο πίνακας έχει αντίστροφο αφού $\det E \neq 0$.

$$\rightarrow E^{-1} = \frac{1}{\det E} \cdot \tilde{E}$$

$$E_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad E_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad E_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$E_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad E_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad E_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$E_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad E_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad E_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Επομένως έχουμε:

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{21} & E_{31} \\ E_{12} & E_{22} & E_{32} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E^{-1} = \frac{1}{\det E} \cdot \tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του C.

$$\det C = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 7 = -13 \neq 0$$

Επομένως ο πίνακας έχει αντίστροφο αφού $\det C \neq 0$.

$$\rightarrow C^{-1} = \frac{1}{\det C} \cdot \tilde{C}$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot (-2) = -2, \quad C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 1 = -1$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 7 = -7, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 3 = 3$$

Επομένως έχουμε:

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 2^ο

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα:

$$x + y - 2z = 7$$

$$2x - 3y + z = -1$$

$$3x - 2y + 3z = -2$$

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-9 + 2 - (6 - 3) - 2 \cdot (-4 + 9) = -9 + 2 - 3 - 10 = -20 \neq 0$$

Δεδομένου ότι είναι $D \neq 0$ το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$$x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad z = \frac{D_z}{D}$$

$$\rightarrow D_x = \begin{vmatrix} 7 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$7 \cdot (-9 + 2) - (-3 + 2) - 2 \cdot (2 - 6) = -49 + 1 + 8 = -40$$

$$\rightarrow x = \frac{D_x}{D} = \frac{-40}{-20} = 2$$

$$\rightarrow D_y = \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$-3 + 2 - 7 \cdot (6 - 3) - 2(-4 + 3) = -3 + 2 - 21 + 2 = -20$$

$$\rightarrow y = \frac{D_y}{D} = \frac{-20}{-20} = 1$$

$$\rightarrow D_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$6 - 2 - (-4 + 3) + 7 \cdot (-4 + 9) = 6 - 2 + 1 + 35 = 40$$

$$\rightarrow z = \frac{D_z}{D} = \frac{40}{-20} = -2$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 3^ο

Να υπολογιστούν οι πρώτες παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

(i) $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x$

(ii) $g(x) = e^x \ln x$

(iii) $h(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$

Λύση:

(i) Η παράγωγος της f είναι:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\sigma\upsilon\nu x - x^2\eta\mu x)' = -2\eta\mu x - (2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x) = \\ &= -2\eta\mu x - 2x\eta\mu x - x^2\sigma\upsilon\nu x = -x^2\sigma\upsilon\nu x - 2(x+1)\eta\mu x \end{aligned}$$

(ii) Η παράγωγος της g είναι:

$$g'(x) = (e^x \ln x)' = e^x \ln x + \frac{e^x}{x} = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

(iii) Η παράγωγος της h είναι:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} \right)' = \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2} \right)' = \\ &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} + 2x^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

Να βρεθούν:

- (i) Τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα αν υπάρχουν.
- (ii) Τα διαστήματα που είναι κυρτή ή κοίλη καθώς και τα σημεία καμπής αν υπάρχουν.

Λύση:

(i) Αρχικά υπολογίζουμε την 1^η παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$$

Έχουμε ότι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x		0		2	
f'(x)	+		-		+
f(x)	↗		↘		↗
		T.M.		T.E.	

T.M. στο $x_0=0$ το $f(0) = 0$, T.E. στο $x_0=2$ το $f(2) = -4$.

(ii) Υπολογίζουμε την 2^η παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 6x - 6$$

Έχουμε ότι:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

→ Για $x < 1$ είναι $f''(x) < 0$ που σημαίνει ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$

→ Για $x > 1$ είναι $f''(x) > 0$ που σημαίνει ότι η f είναι κυρτή στο $[1, +\infty)$

Σ.Κ. $(1, f(1))$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2009

Θέμα 5^ο

Το κόστος σε €/km σωλήνα που τροφοδοτεί με νερό ένα απομακρυσμένο εργοστάσιο δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{48}{x} + 12x$, όπου x η διατομή του σωλήνα σε cm^2 . Να βρεθεί η διατομή του σωλήνα για την οποία το κόστος γίνεται ελάχιστο και η ελάχιστη τιμή κόστους ανά km.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την 1^η παράγωγο της συνάρτησης $K(x)$.

$$K'(x) = \left(\frac{48}{x} + 12x \right)' = -\frac{48}{x^2} + 12$$

Έχουμε ότι:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{48}{x^2} + 12 = 0 \Leftrightarrow \frac{48}{x^2} = 12 \Leftrightarrow 12x^2 = 48 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \rightarrow x = 2 \text{ cm}$$

x	2		
$K'(x)$	-	0	+
$K(x)$	↘		↗
	T.E.		

Η ελάχιστη τιμή του κόστους θα είναι: $K(2) = \frac{48}{2} + 12 \cdot 2 = 24 + 24 = 48$ €/km.

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 1^ο

Δίνονται οι πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν:

i) $A-3B$, ii) $2A+B^T$, iii) ΓB

Λύση:

$$i) A-3B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 12 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$ii) 2A+B^T = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$iii) \Gamma B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-4 & 2-3 \\ -2+0 & 4+0 \\ -3+4 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -2 & 4 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 2^ο

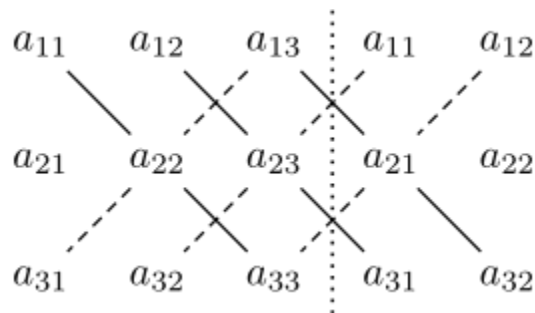
Δίνεται ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- i) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα με τον κανόνα του Sarrus.
- ii) Να υπολογισθεί η ορίζουσα του πίνακα με τον γενικό τρόπο.
- iii) Είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος ή όχι και γιατί;

Λύση:

- i) Για να υπολογίσουμε την ορίζουσα του πίνακα A με τον κανόνα του Sarrus



εκτελούμε υπολογισμούς όπως παρακάτω.

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Στην περίπτωση μας και με τη βοήθεια του παραπάνω κανόνα έχουμε:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 1 - 0 - 0 = -1$$

ii) Με τον γενικό τρόπο υπολογισμού ορίζουσας έχουμε ότι:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

iii) Ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος γιατί είναι $\det A \neq 0$.

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 3^ο

Να λυθεί με χρήση οριζουσών το σύστημα:

$$4x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα του συστήματος:

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση: $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$

$$\rightarrow D_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$$

$$\rightarrow D_y = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7$$

Άρα έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{1}{3} \quad \text{και} \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{7}{3}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 4^ο

Να υπολογισθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$$

Λύση:

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x+3-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) = (1+1)(\sqrt{1+3} + 2) = 2 \cdot 4 = 8$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 5^ο

Να παραγωγιισθούν: i) $\eta\mu(3x) \cdot e^{2x} + 4x$, ii) $\frac{\ln(x^2 - 1)}{x^3}$, iii) $e^{(3x+1)} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}$

Λύση:

i) Έχουμε ότι:

$$\left(\eta\mu(3x) \cdot e^{2x} + 4x\right)' = \left(\eta\mu(3x)\right)' e^{2x} + \eta\mu(3x) \left(e^{2x}\right)' + (4x)' =$$

$$3e^{2x} \sigma\upsilon\nu(3x) + 2e^{2x} \eta\mu(3x) + 4 = e^{2x} (2\eta\mu(3x) + 3\sigma\upsilon\nu(3x)) + 4$$

ii) Έχουμε ότι:

$$\left(\frac{\ln(x^2 - 1)}{x^3}\right)' = \frac{\left(\ln(x^2 - 1)\right)' x^3 - \ln(x^2 - 1) \left(x^3\right)'}{x^6} =$$

$$\frac{\frac{2x}{x^2 - 1} x^3 - 3x^2 \ln(x^2 - 1)}{x^6} = \frac{2x^4 - 3x^2 (x^2 - 1) \ln(x^2 - 1)}{x^6 (x^2 - 1)} = \frac{2x^2 - 3(x^2 - 1) \ln(x^2 - 1)}{x^4 (x^2 - 1)}$$

iii) Έχουμε ότι:

$$\left(e^{(3x+1)} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\right)' = \left(e^{(3x+1)}\right)' \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} + e^{(3x+1)} \left(\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x}\right)' =$$

$$3e^{(3x+1)} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} + e^{(3x+1)} \left(\left(\sigma\upsilon\nu x\right)^{\frac{1}{3}}\right)' = 3e^{(3x+1)} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} + \frac{1}{3} e^{(3x+1)} (\sigma\upsilon\nu x)^{-\frac{2}{3}} (-\eta\mu x) =$$

$$3e^{(3x+1)} \sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{1}{3} e^{(3x+1)} \frac{\eta\mu x}{\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \frac{9e^{(3x+1)} \sigma\upsilon\nu x - e^{(3x+1)} \eta\mu x}{3\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}} = \frac{e^{(3x+1)} (9\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)}{3\sqrt[3]{\sigma\upsilon\nu^2 x}}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

05-07-2013

Θέμα 6^ο

Να βρεθούν τα ακρότατα (και τι είδους) της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x$.




Για $x=1.5$, έχουμε ή όχι σημείο καμπής;

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την 1^η παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x \right)' = x^2 - 5x + 2$$

Έχουμε ότι: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})$ ή $x = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{17})$

x		$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{17})$		$\frac{1}{2}(5 + \sqrt{17})$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$					
		T.M.		T.E.	

Υπολογίζουμε την 2^η παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$.

$$f''(x) = (x^2 - 5x + 2)' = 2x - 5 \rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 2.5 \rightarrow \text{Άρα για } x=1.5$$

δεν έχουμε σημείο καμπής αφού αυτή η τιμή δεν είναι ρίζα της $f''(x) = 0$.

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί τα παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$$

Λύση:

Θέλουμε να υπολογίσουμε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$$

Παρατηρούμε ότι το 4 αποτελεί ρίζα τόσο του αριθμητή, όσο και του παρονομαστή, επομένως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε άμεσα το όριο γιατί προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Θα εργαστούμε επομένως ως εξής:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x - 1)}{(x - 4)(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1}{x + 4} = \frac{4 - 1}{4 + 4} = \frac{3}{8}$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2

Να γίνει η διερεύνηση του παρακάτω συστήματος και να βρεθούν αν υπάρχουν οι λύσεις του.

$$x + 2y - z = 0$$

$$4x + y + z = -1$$

$$-3x + 2y - z = 2$$

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1 - 2) - 2 \cdot (-4 + 3) - 1 \cdot (8 + 3) = -3 - 2 \cdot (-1) - 11 = -3 + 2 - 11 = -12$$

Επομένως είναι $D \neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-2 \cdot (1 - 2) - 1 \cdot (-2 - 2) = -2 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4) = 2 + 4 = 6$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (1 - 2) - 1 \cdot (8 - 3) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 5 = -1 - 5 = -6$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (2 + 2) - 2 \cdot (8 - 3) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 4 - 10 = -6$$

Επομένως έχουμε ότι:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-6}{-12} = \frac{1}{2}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3

Να εξετάσετε αν το παρακάτω σύστημα έχει μοναδική λύση και αν έχει ναλυθεί.

$$2x + 3y + 4z = 3$$

$$4x - 3y - 4z = 0$$

$$2x + 6y - 8z = 1$$

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό σύστημα 3x3.

Έχουμε ότι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & -3 & -4 \\ 2 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(24 + 24) - 3(-32 + 8) + 4(24 + 6) = 2 \cdot 48 - 3 \cdot (-24) + 4 \cdot 30 =$$

$$96 + 72 + 120 = 288$$

Επομένως είναι $D \neq 0$, που σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση.

Έχουμε ότι:

$$D_x = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 1 & 6 & -8 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$3(24 + 24) - 3(0 + 4) + 4(0 + 3) = 3 \cdot 48 - 12 + 12 = 144$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & -8 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 1 & -8 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2(0 + 4) - 3(-32 + 8) + 4(4 - 0) = 2 \cdot 4 - 3 \cdot (-24) + 16 = 8 + 72 + 16 = 96$$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$2(-3 - 0) - 3(4 - 0) + 3(24 + 6) = -6 - 12 + 3 \cdot 30 = -18 + 90 = 72$$

Επομένως έχουμε:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{144}{288} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{96}{288} = \frac{1}{3}, \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{72}{288} = \frac{1}{4}$$

Άρα είναι:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι α , β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1$, να δέχεται τοπικό ακρότατο στα σημεία $x_0=1$ και $x_0=-2$. Να προσδιορίσετε το είδος των ακροτάτων.

Λύση:

Αρχικά υπολογίζουμε την 1^η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = (\alpha x^3 + \beta x^2 - 6x + 1)' = 3\alpha x^2 + 2\beta x - 6$$

Έχουμε ότι:

$$\begin{cases} f'(1) = 0 \\ f'(-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha + 2\beta - 6 = 0 \\ 12\alpha - 4\beta - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Υπολογίζουμε την 2^η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f''(x) = (3\alpha x^2 + 2\beta x - 6)' = 6\alpha x + 2\beta$$

$$f''(1) = 9 > 0 \text{ (Τ.Ε. στο } x_0=1) \text{ και } f''(-2) = -9 < 0 \text{ (Τ.Μ. στο } x_0=-2)$$

ΤΜΗΜΑ ΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΤΕΙ ΣΕΡΡΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

2) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f . Διατυπώστε το κριτήριο της 2^{ης} παραγώγου. Να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της f (τοπικό μέγιστο/ελάχιστο).

Λύση:

1) Πρέπει να ισχύει ότι: $x > 0$

Επομένως υπό τη μορφή διαστήματος είναι: $x \in (0, +\infty)$

2) Αρχικά υπολογίζουμε την 1^η παράγωγο της συνάρτησης:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x^2} \right)' = \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x} x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$$

Κατόπιν βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2 \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{\ln x} = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{e}$$

→ Κριτήριο 2^{ης} Παραγώγου (για τοπικά ακρότατα)

Ας είναι $y=f(x)$ μία συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$, παραγωγίσιμη στο (a, b) και x_0 ένα κρίσιμο σημείο της f , στο οποίο υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f και είναι διάφορη του μηδενός. Τότε :

- ✓ αν $f''(x_0) > 0$, τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο x_0 .
- ✓ αν $f''(x_0) < 0$, τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_0 .

Επομένως έχουμε:

$$f''(x) = \left(\frac{1-2\ln x}{x^3} \right)' = \frac{(1-2\ln x)' x^3 - (1-2\ln x)(x^3)'}{x^6} =$$
$$\frac{-\frac{2}{x} x^3 - 3x^2(1-2\ln x)}{x^6} = \frac{-2x^2 - 3x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5x^2 + 6x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-5 + 6 \ln x}{x^4}$$
$$f''(\sqrt{e}) = \frac{-5 + 6 \ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^4} = \frac{-5 + 6 \ln e^{\frac{1}{2}}}{e^2} = \frac{-5 + 3}{e^2} = -\frac{2}{e^2} < 0$$

Συμπέρασμα:

Η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_0 = \sqrt{e}$ το $f(\sqrt{e}) = \frac{\ln \sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e}$